Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki

4 Tydzień 4

4.1 Zadanie 1

(a) $X = \{0, 1\}$

(b) $X = \{1, 2, \ldots, 52\}$

(c) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(d) $X = \{0, 1\}$

4.2 Zadanie 2

$X\ Bin(n, p)$; n - ilość prób, p - prawdopodobieństwo wygranej

(a)

$$k = 2, X\ Bin(n = 4, p = \frac{1}{2})$$

$$P(X = 2) * \binom{4}{2} * \binom{1}{2}^2 * \binom{1}{2}^2 = 6 * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

(b)

$$k = 3, X\ Bin(n = 6, p = \frac{1}{6})$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} * \binom{1}{2}^2 * \binom{1}{2}^2 = 20 * \frac{1}{8} * \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

$$Ex = n * p$$

$$VarX = n * p(1 - p)$$

(a)

$$Ex = 4 * \frac{1}{2} = 2$$

$$VarX = 2 * \frac{1}{2} = 1$$

(b)

$$Ex = 6 * \frac{1}{2} = 3$$

$$VarX = 3 * \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

4.3 Zadanie 3

Firma zakupiła 4 nowe monitory tej samej marki. Prawdopodobieństwo, że monitor tej marki ulegnie awarii w okresie gwarancji wynosi $0,05$. Oblicz prawdopodobieństwo, że

(a) dwa monitory ulegną awarii w okresie gwarancji

$$P(X = 2) = \frac{4}{2} * 0.05^2 * 0.95^2$$

(b) nie wszystkie monitory ulegną awarii w okresie gwarancji

$$P(X < 4) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{4}{4} * 0.05^4 * 0.05^0$$

(c) co najmniej jeden monitor ulegnie awarii w okresie gwarancji

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{4}{0} * 0.05^0 * 0.35^4$$

Czy te zdarzenia można opisać za pomocą jednej zmiennej losowej czy potrzebujemy różnych? Policz dla wyznaczonych zamiennych losowych wartość oczekiwaną i wariancję.

$$EX = 4 * 0.05$$

$$Var(X) = 4 * 0.05 * 0.95$$

4.4 Zadanie 4

(a) A - wypadł orzeł

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Zmienna ma rozkład geometryczny. Wzór na prawdopodobieństwo:

$$P(X = k) = (1 - p)^{(k-1)}p$$

$$k = 4$$

$$P(X = 4) = (1 - \frac{1}{2})^{(4-1)}\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^3\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

(b)

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

$$Var(X) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2$$

4.5 Zadanie 5

(a) Liczba spółek dostępnych na giełdzie: $N = 20$ Liczba spółek, których kurs wzrósł: $M = 14$ Liczba spółek, które zakupił inwestor: $n = 8$

(b) Prawdopodobieństwo, że wśród zakupionych przez inwestora akcji, kurs co najmniej siedmiu wzrósł (zmienna losowa o rozkładzie hipergeometrycznym):

$$P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) =$$
$$\frac{\binom{14}{7} * \binom{20-14}{8-7}}{\binom{20}{8}} + \frac{\binom{14}{8} * \binom{20-14}{8-8}}{\binom{20}{8}} =$$
$$\frac{\binom{14}{7} * \binom{6}{1} + \binom{14}{8} * \binom{6}{0}}{\binom{20}{8}} =$$
$$\frac{\frac{14!}{7!*7!} * \frac{6!}{1!*5!} + \frac{14!}{8!*6!} * \frac{6!}{0!*6!}}{\frac{20!}{8!*12!}} =$$
$$\frac{\frac{7!*8*9*10*11*12*13*14}{7!*2*3*4*5*6*7} * \frac{5!*6}{5!} + \frac{8!*9*10*11*12*13*14}{8!*2*3*4*5*6} * \frac{6!}{6!}}{\frac{12!*13*14*15*16*17*18*19*20}{12!*2*3*4*5*6*7*8}} =$$
$$\frac{20592 + 3003}{125970} = \frac{23595}{125970} \approx 0.1873$$

4.6 Zadanie 6

W klasie jest 20 osób przy czym dziewczyn jest o 6 więcej niż chłopców. Nauczyciel wybiera losowo do odpowiedzi cztery osoby, przy czym osoba raz wybrana nie jest pytania ponownie. Oblicz prawdopodobieństwo, że nauczyciel wybierze:

1. samych chłopców
2. tyle samo dziewcząt co chłopców

N - liczba osób w klasie, $N = 20$ n - liczba osób pytanych, $n = 4$ M - liczba chłopców, $M = 7$

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X o rozkładzie hipergeometrycznym wyraża się wzorem:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} * \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

1. $P(X = 4) = \frac{\binom{7}{4} * \binom{13}{0}}{\binom{20}{4}}$
2. Trzeba wybrać dwóch chłopaków z 7 i resztę osób z grupy dziewczyn

   A - zdarzenie w którym nauczyciel wybrał dwóch chłopców i dwie dziewczynki

   $P(A) = P(X = 2) = \frac{\binom{7}{2} * \binom{13}{2}}{\binom{20}{4}}$

4.7 Zadanie 7

(a)

$$P(X=0)=e^{-2,4}*\frac{2,4^0}{0!}=e^{-2,4}$$

$$P(X=1)=e^{-2,4}*\frac{2,4^1}{1!}=e^{-2,4}*2,4$$
$$EX=2,4$$
$$Var(X)=2,4$$

(b) Żeby policzyć prawdopodobieństwo, że zmienna losowa będzie miała wartość powyżej 5 można policzyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

$$P(X>5)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)-P(X=5)$$

$$P(X>5)=e^{-2,4}-e^{-2,4}*2,4-\frac{e^{-2,4}*2,4^2}{2}-\frac{e^{-2,4}*2,4^3}{6}-\frac{e^{-2,4}*2,4^4}{24}-\frac{e^{-2,4}*2,4^5}{120}$$

Zmienna losowa o rozkładzie Poissona opisuje zmienne, w których zdarzenia występują rzadko.

4.8 Zadanie 8

(a)

$$\chi_{[2,6]}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{gdy } x\in[2,6]\\ 0 & \text{gdy } x\notin[2,6]\end{cases}$$

(b)

$$P(X\in[3,3.5])=\int\limits_{3}^{3.5}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot(3.5-3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(c)

$$P(X\in(3,3.5))=P(X\in[3,3.5])=\frac{1}{8}$$

4.9 Zadanie 10

$$P(X>0)=\int\limits_{0}^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$$

Wykres tej funkcji jest parzysty a pole całego wykresu wynosi 1 więc z połowy jest $\frac{1}{2}$.

4.10 Zadanie 11

(a)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{5}} * 3 \\
&= \frac{3}{\frac{1}{5}} \\
&= 3 * 5 \\
E(X) &= 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{(\frac{1}{5})^2} * 3 \\
&= \frac{1}{\frac{1}{25}} \\
&= 25 * 3 \\
&= 75
\end{aligned}$$

(b) Korzystając z formuły Gamma-Poissona

$$P(T < t) = P(X \geq \alpha), \qquad (Bo : P(T < t) = P(T \leq t))$$

gdzie

$$\begin{gathered}
x = 3, \alpha = \frac{1}{5}, t = 12 \quad (x = 3 \text{ bo mamy 3 bloki}) \\
P(X \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) = 1 - F(2) \\
P(T < 12) = P(X \geq 3) = 1 - F(2) = 1 - 0.597 \\
= 0.430
\end{gathered}$$

$\Rightarrow$ Prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejsyzm niż 12 minut, wynosi $\approx 43\%$

4.11 Zadanie 12

Pięć procent części komputerowych produkowanych przez pewnego producenta jest wadliwych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że próba 16 części zawiera więcej niż 3 części wadliwe?

$$P(X = 0) = \binom{16}{0} * (0,95)^{16} * (0,05)^{16-16} = (0,95)^{16}$$

$$P(X=1) = \binom{16}{1} * (0,95)^{15} * (0,05)^{16-15} = 16 * (0,95)^{15} * (0,05)$$

$$P(X=2) = \binom{16}{2} * (0,95)^{14} * (0,05)^{16-14} = 120 * (0,95)^{14} * (0,05)^{2}$$

$$P(X=3) = \binom{16}{3} * (0,95)^{13} * (0,05)^{16-13} = 560 * (0,95)^{13} * (0,05)^{3}$$

$$P(X > 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)]$$

4.12 Zadanie 13

Niech X będzie zmienną losową opisującą liczbę komunikatów odebraną w ciągu godziny. Z warunków zadania widać, że ma ona rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 9$.

1.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - (\ P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\ )$$

$$= 1 - (\ e^{-9}(\ \frac{9^0}{0!} + \frac{9^1}{1!} + \frac{9^2}{2!} + \frac{9^3}{3!} + \frac{9^4}{4!}\ )\ ) = 1 - e^{-9} \cdot \frac{3563}{8} = 0.945$$

2.

$$P(X=5) = e^{-9} \cdot \frac{9^5}{5!} = 0.06073$$

4.13 Zadanie 14

Zmienna losowa ma rozkład duwmianowy o parametrach (n, p);

$$n = 15$$
$$p = 0.3 * 0.6 = 0.18$$
$$q = 1 - 0.18 = 0.82$$

1. $EX = n * p = 15 * 0,18 = 2,7$
2. $P(X=2) = \binom{15}{2} * (\frac{18}{100})^2 * (\frac{82}{100})^{13}$