МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ КИНО И ТЕЛЕВИДЕНИЯ

 Кафедра математики и информатики

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Методические указания к выполнению лабораторной работы
по математике на персональных ЭВМ
для студентов дневного и заочного отделений ФАВТ и ФПСКТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2003

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент В.Г. Галкина

Рецензент: канд. физ.-мат. наук А.С. Мальков

Рекомендовано к изданию в качестве методических указаний кафедрой математики и информатики.

Протокол № 1 от 30.08.02.

кино и телевидения,

ВВЕДЕНИЕ

Метод Монте-Карло – это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. Этот метод можно определить как метод статистических испытаний или метод моделирования случайных величин с целью вычисления характеристик их распределений. Обычно предполагается, что моделирование осуществляется с помощью ЭВМ, хотя в некоторых случаях можно добиться успеха, используя приспособления типа рулетки, карандаш и бумагу [8].

В подавляющем большинстве задач, решаемых методом Монте-Карло, вычисляют математическое ожидание некоторой случайной величины. Так как математическое ожидание непрерывной случайной величины выражается через обычный интеграл, то центральное положение метода Монте-Карло занимают методы вычисления интегралов.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Название «Монте-Карло» произошло от города Монте-Карло в княжестве Монако, известного своими казино, ибо одним из простейших приборов для генерирования случайных чисел служит рулетка [12].

Идея моделирования случайных явлений очень стара и, по мнению некоторых авторов, например Дж. Н. Холтона [13], восходит ко временам Древнего Вавилона и Ветхого Завета. Что же касается использования таких методов для приближенных вычислений, то первой работой в этой области принято считать работу А. Холла [14] о вычислении числа π с помощью случайных бросаний иглы на разграфленную параллельными линиями бумагу [8]. Это так называемая задача Бюффона.

Пусть на плоскости изображена последовательность равноотстоящих параллельных прямых, и на плоскость сверху бросается игла. Какова вероятность пересечения иглой одной из прямых? Оказывается, что эта вероятность равна

$$p = \frac{1}{\pi}.$$

Можно ли отсюда определить значение числа π? Для этого нужно фактически осуществить бросание иглы на плоскость с изображенными на ней параллельными прямыми.

Тогда

$$\frac{M}{N} \approx \frac{1}{\pi}, \tag{1}$$

где N – количество всех бросаний иглы, M – количество бросаний, при которых игла пересекла одну из прямых. Из соотношения (1) и определяется приближенное значение числа π. Это было проведено экспериментально. Получившиеся результаты дали хорошее совпадение с известным значением числа π [3].

Можно назвать также ряд более поздних работ, в которых до появления ЭВМ использовались по существу идеи метода Монте-Карло. Довольно подробно об этом сказано в книге Дж. Хамерелли и Д. Хэндскома [15]. Идеи эти не получили заметного развития вплоть до 1944 г., когда в связи с работами по созданию атомной бомбы Дж. фон Нейман предложил широко использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Первая работа, где этот вопрос систематически излагается, принадлежит Н. Метрополису и С. Уламу [16], опубликована в 1949 г. Этот год и считается официальной датой рождения метода Монте-Карло.

Первоначально метод Монте-Карло использовался главным образом для решения задач ядерной физики, где традиционные численные методы оказались малопригодными. Далее его влияние распространилось на широкий круг задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. К разделам науки, где все в большей мере используется метод Монте-Карло, следует отнести теорию массового обслуживания, теорию игр и математическую экономику и ряд других [8].

Термин «метод Монте-Карло» равнозначен термину «метод статистических испытаний», также принятому в отечественной литературе. В зарубежных изданиях обычно говорят о *методах* Монте-Карло.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим способ приближенного вычисления определенного интеграла по методу Монте-Карло.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

Рассмотрим равномерно распределенную случайную величину t, плотность распределения вероятностей которой имеет вид

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0, \\ 1, & \text{если} \quad 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{если} \quad t > 1. \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание функции случайного аргумента $\varphi(t)$ вычисляется по формуле [5, 10]

$$M(\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, p(t)\, dt.$$

С учетом значений функции $p(t)$ имеем

$$M(\varphi(t)) = \int_{0}^{1} \varphi(t) dt. \tag{2}$$

Вычислим приближенное значение математического ожидания $M(\varphi(t))$. Пусть в результате N испытаний получено N значений случайной величины t:

$$t_i, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Эти значения можно взять из таблицы случайных чисел или получить с помощью генератора случайных чисел на ЭВМ. Тогда по теореме Чебышева

$$M(\varphi(t)) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(t_i). \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), получаем формулу для приближенного вычисления определенного интеграла:

$$\int_{0}^{1} \varphi(t) dt \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(t_i). \tag{4}$$

Вычисление определенного интеграла с произвольными пределами интегрирования $\int_a^b f(x)dx$ сводится к предыдущей задаче с помощью замены переменной $x = a + (b - a)t$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 \varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t) = f(a+(b-a)t)$.

С учетом (4) получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(t_i)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i), \tag{5}$$

где $x_i = a+(b-a)t_i,\ i=1,2,..N$, или значения x_i можно получить на ЭВМ с помощью генератора равномерно распределенных на отрезке $[a, b]$ чисел.

Другой способ приближенного вычисления определенного интеграла методом Монте-Карло основан на определении геометрической вероятности [5, 6, 10].

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$, где $f(x)$ на отрезке $[0, a]$ принимает неотрицательные значения.

То есть требуется вычислить площадь S криволинейной трапеции (рис. 1), которая численно равна значению определенного интеграла

$$\int_0^a f(x)dx. \tag{6}$$

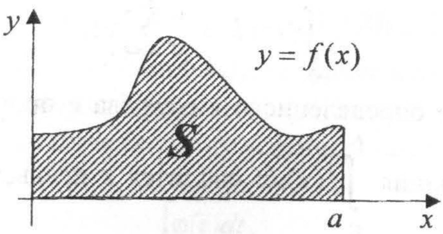


Рис. 1

Отметим, что интеграл с произвольными пределами интегрирования $\int_c^d f_1(z)dz$ сводится к интегралу (6) с помощью замены переменной $z = x + c$.

Фигура площади S может быть вписана в прямоугольник со сторонами a и b (рис. 2), где $b \geq \max\limits_{x\in[0,a]} f(x)$.

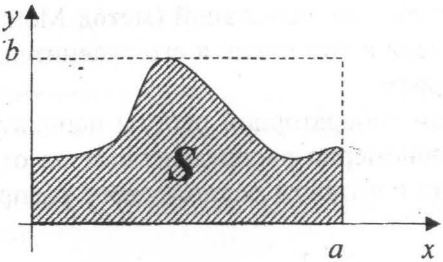


Рис. 2

Пусть в прямоугольник со сторонами a и b попадают N случайных точек, координаты которых независимо и равномерно распределены: x_i – на отрезке $[0, a]$, y_i – на отрезке $[0, b]$, i=1, 2, … N. Тогда вероятность того, что случайная точка попадет на фигуру S, равна отношению площадей фигуры S и прямоугольника со сторонами a и b, то есть

$$p = \frac{S}{ab}.$$

С другой стороны, эта же вероятность приближенно равна

$$p \approx \frac{M}{N},$$

где M – число случайных точек, попавших на фигуру S, N – число случайных точек, попавших в прямоугольник, площадь которого равна ab.

Таким образом, получаем

$$\frac{S}{ab} \approx \frac{M}{N} \quad \text{или} \quad S \approx \frac{M}{N}ab \tag{7}$$

или

$$\int_0^a f(x)dx \approx \frac{M}{N}ab. \tag{7'}$$

Отметим [2, 4, 8], что точность (погрешность) при вычислении по методу Монте-Карло оценивается величиной

$$\varepsilon = k\frac{1}{\sqrt{N}},$$

где k – некоторая постоянная, N – число испытаний. Очевидно, что величина ε стремится к нулю с ростом N, но достаточно медленно. Увеличение точности расчетов, например в 10 раз, приводит к стократному увеличению времени решения задачи. Но при решении многих практических задач, где не требуется очень большая точность, метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) широко применим, благодаря в том числе и его сравнительной простоте и естественности алгоритма.

При выполнении лабораторной работы используется генератор случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0, x] Напомним, что функция плотности равномерного распределения имеет вид [5, 10]

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & \text{если} \quad x \in [c,d], \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [c,d], \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 3.

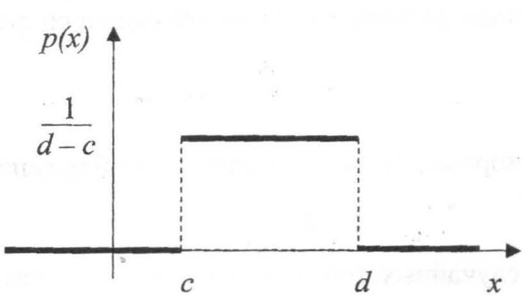


Рис. 3

Математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ равномерного распределения вычисляются по формулам [5, 10]

$$M(X) = \frac{c+d}{2}, \quad D(X) = \frac{(c-d)^2}{12}.$$

В частности, если случайная величина равномерно распределена на отрезке [0, a] (рис. 4), то она имеет плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & \text{если} \quad x\in[0,a],\\ 0, & \text{если} \quad x\notin[0,a].\end{cases}$$

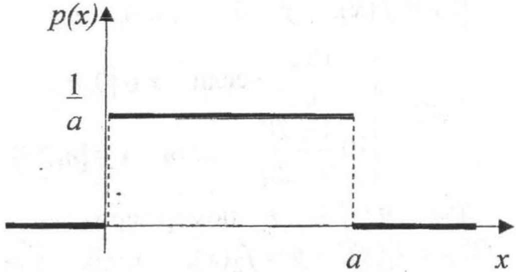


Рис. 4

Ее математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ вычисляются по формулам

$$M(X)=\frac{a}{2}, \quad D(X)=\frac{a^2}{12}. \tag{8}$$

Предполагается, что лабораторная работа будет выполняться на компьютере в системе MathCAD [7].

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1

Используя метод Монте-Карло, вычислить площадь треугольника, ограниченного линиями

1) $y = f(x), \quad y = 0, \quad x = 0,$ где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10x}{n}, & \text{если} \quad x \in [0, n), \\ 10\dfrac{x-20}{n-20}, & \text{если} \quad x \in [n, 20) \end{cases}$$

для $n \le 10$, n – номер варианта

2) $y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x = 0,$ где

$$f_1(x) = \frac{10x}{n},$$

$$f_2(x) = 10\frac{x-20}{n-20} + 20,$$

для $n \ge 11$, n – номер варианта

Указание: При выполнении задания 1 следует выполнить следующие действия.

1. Построить график функции

$$y = f(x) \quad \text{для} \quad n \le 10$$
$$(y = f_1(x), y = f_2(x), \quad \text{для} \quad n \ge 11).$$

Определить размеры *a*, *b* прямоугольника, в котором целиком лежит фигура, площадь которой нужно вычислить.

2. Выбрать количество случайных точек *N*, например N=100.

3. С помощью встроенной функции *rnd(x)* (генератора случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0, *x*]) получить *N* равномерно распределенных в прямоугольнике *a* x *b* случайных точек с координатами (x_i, y_i), i=1, 2, …*N*.

Установив курсор на команде x_i:=*rnd*(*a*), с помощью нажатия на клавишу F9 выбрать такую часть последовательности случайных чисел, для которой среднее значение (математическое ожидание) и дисперсия мало отличаются от соответствующих для равномерного распределения теоретических значений, вычисляемых по формулам (8). Для вычисления математического ожидания используется встроенная функция *mean*(*x*), дисперсии – *var*(*x*).

Аналогичные операции проделать для y_i:=*rnd*(*b*).

4. Вычислить количество *M* случайных точек, лежащих внутри фигуры *S*. Для этого нужно проверить выполнение условия $y_i < f(x_i)$

(для вариантов $n \le 10$) или $f_1(x_i) < y_i < f_2(x_i)$ (для вариантов $n \ge 11$). Если это условие выполняется, то точка попадает на фигуру S.

5. Вычислить приближенно площадь фигуры S по формуле (7)

$$S \approx \frac{M}{N} a \cdot b$$

или по формуле (5)

$$S \approx \frac{a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) .$$

6. Оценить абсолютную и относительную погрешности по методу Монте-Карло.

7. Увеличить количество точек N и повторить выполнение пп. 3-6.

ЗАДАНИЕ 2

Вычислить приближенно определенный интеграл по методу Монте-Карло

$$1) \int_0^5 \sqrt{11 - u \sin^2 x}\, dx, \quad \text{для} \quad n \le 10,$$

$$2) \int_0^7 \sqrt{29 - u \cos^2 x}\, dx, \quad \text{для} \quad n \ge 11.$$

n – номер варианта

Указание. Выполнить пп. 1-7 из указания для задания 1.

ЗАДАНИЕ 3

Вычислить приближенное значение числа π, исходя из вычисления площади круга радиуса R=n, где n – номер варианта.

Указание. Так как площадь круга радиуса R, лежащего целиком в квадрате со стороной $2R$ и площадью S=$4R^2$, равна

$$S_R = \pi R^2, \quad \text{то} \quad S_R \approx \frac{M}{N} S$$

$$\text{или} \quad \pi R^2 \approx \frac{M}{N} 4R^2 \quad \text{или} \quad \pi \approx 4\frac{M}{N},$$

где N – общее число случайных точек квадрата $[-R, R]$ x $[-R, R]$,

M – число случайных точек, попавших в круг радиуса R.

При выполнении задания 3 следует выполнить следующие действия.

1. Выбрать количество случайных точек, например N=100.

2. С помощью генератора случайных, равномерно распределенных на отрезке [0, x] чисел $rnd(x)$ получить N равномерно распределенных случайных точек на отрезке длиной $2R$ (x_i:=$rnd(2R)$, i=1, 2, …N), оценить среднее значение и дисперсию выбранной части последовательности x_i (см. п. 3 задания 1). В качестве значений случайных ординат y_i выбрать следующие N значений последовательности случайных чисел (j:=1…N; y_j:=x_{j+N}).

3. Вычислить количество M случайных точек с координатами (x_i, y_i), лежащих внутри круга S_R, для чего нужно проверить выполнение условия

$$(x_i + R)^2 + (y_i - R)^2 < R^2.$$

Если это условие выполняется, то точка попадает в круг S_R.

4. Построить окружность радиуса R, вписанную в квадрат [$-R$, R] x [$-R$, R], нанести на этот квадрат выбранные случайные точки с координатами (x_i, y_i). Использовать параметрическое задание окружности

$$x = R + R\cos\varphi,$$
$$y = R + R\sin\varphi, \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

ЗАДАНИЕ 4

Вычислить приближенно по методу Монте-Карло площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией, заданной в полярных координатах.

$$\rho^2 = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi, \quad \text{где}$$

$$1)\ A = 11 + n, \quad B = 11 - n, \quad \text{для} \quad n \le 10$$

$$2)\ A = n = 10, \quad B = n - 10, \quad \text{для} \quad n \ge 11$$

n – номер варианта.

Указание.

1. Построить график кривой, заданной в полярных координатах, используя формулы перехода от полярных координат к декартовым

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Определить размеры [$-a$, a] x [$-b$, b] прямоугольника, в котором лежит фигура S, ограниченная заданной замкнутой линией.

2. Выполнить пункты 2, 3 из задания 1.

3. Вычислить количество M случайных точек, лежащих внутри фигуры S. Для этого нужно проверить выполнение условия

$$r_i < \rho(\varphi_i),$$

где (r_i, φ_i) - полярные координаты случайной точки (x_i, y_i);

$$r_i = \sqrt{x_i^{\,2} + y_i^{\,2}}; \quad \varphi_i = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y_i}{x_i}, & \text{если} \quad x_i > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y_i}{x_i}, & \text{если} \quad x_i < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x_i = 0 \quad \text{и} \quad y_i > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x_i = 0 \quad \text{и} \quad y_i < 0 \\ 0, & \text{если} \quad x_i = 0 \quad \text{и} \quad y_i = 0 \end{cases}$$

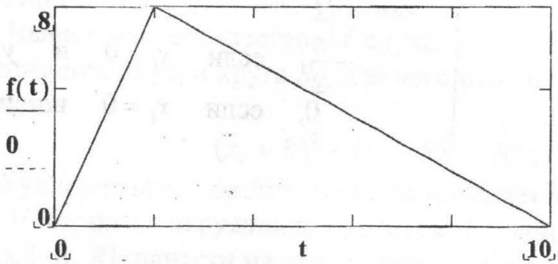
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1

Используя метод Монте-Карло, вычислить площадь треугольника, ограниченного линиями $y=4x$, $y=10-x$, $y=0$.

РЕШЕНИЕ

$\mathbf{f(x) := if(x<2, 4\cdot x, 10-x)} \quad \mathbf{t := 0, 0.5 .. 10}$



$\mathbf{b := 8} \quad \mathbf{a := 10} \quad \mathbf{N := 200} \quad \mathbf{i := 1 .. N}$

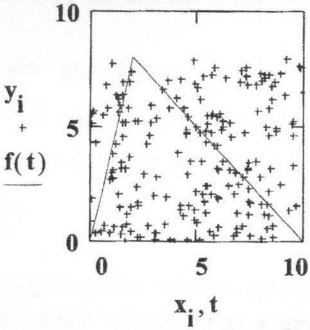
$\mathbf{x_i := rnd(a)} \quad \mathbf{y_i := rnd(b)}$

$\mathbf{m_i := if(y_i < f(x_i), 1, 0)}$

$$\mathbf{M := \sum_i m_i} \qquad \mathbf{M = 110}$$

$$\mathbf{S := \frac{M}{N}\cdot a\cdot b}$$

$\mathbf{S = 44}$



Проверка

$$\mathbf{s := \int_0^a f(t)\, dt}$$

$\mathbf{s = 40.001}$

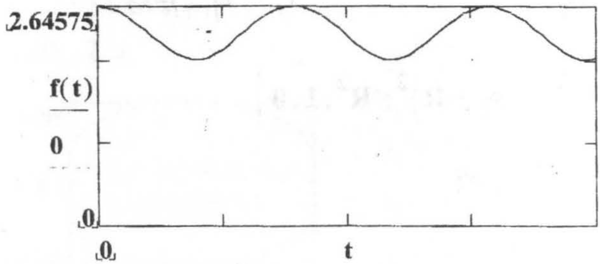
ЗАДАНИЕ 2

Вычислить приближенно определенный интеграл по методу Монте-Карло

$$\int_0^8 \sqrt{7-3\sin^2 x}\, dx.$$

РЕШЕНИЕ

$\mathbf{f(x) := \sqrt{7 - 3\cdot\sin(x)^2}}$ $\qquad$ $\mathbf{t := 0, 0.125 .. 8}$



$\mathbf{b := 3 \quad a := 8 \quad N := 200 \quad i := 1 .. N}$

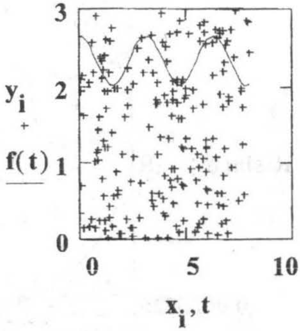
$\mathbf{x_i := rnd(a) \qquad y_i := rnd(b)}$

$\mathbf{m_i := if\left(y_i < f\left(x_i\right), 1, 0\right)}$

$\mathbf{M := \sum_i m_i \qquad M = 159}$

$\mathbf{S := \frac{M}{N}\cdot a\cdot b}$

$\mathbf{S = 19.08}$



Проверка

$\mathbf{s := \int_0^a f(t)\, dt}$

$\mathbf{s = 18.625}$

ЗАДАНИЕ 3

Вычислить приближенное значение числа π, исходя из вычисления площади круга радиуса R=33.

РЕШЕНИЕ

$R := 33 \qquad N := 200 \qquad i := 1..2\cdot N$

$z_i := rnd(R\cdot 2) \qquad mean(z) = 31.482 \qquad var(z) = 363.79$

$4\cdot R\cdot\frac{R}{12} = 363$

$j := 1..N \qquad x_j := z_j \qquad y_j := z_{j+N}$

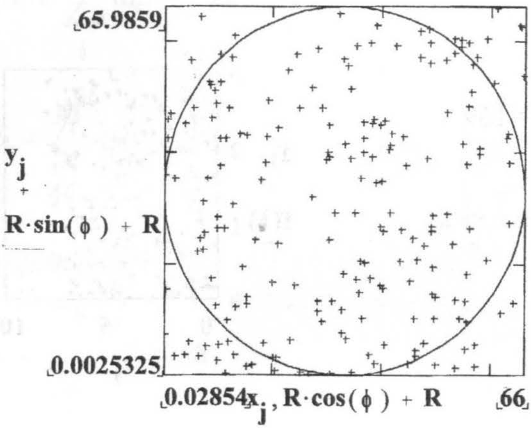
$m_j := if\left[\left(x_j - R\right)^2 + \left(y_j - R\right)^2 < R^2, 1, 0\right]$

$M := \sum_j m_j \qquad M = 155$

$S := \frac{M}{N}\cdot(2\cdot R)^2 \qquad S = 3.376\cdot 10^3 \qquad pi := \frac{S}{R^2} \qquad pi = 3.1$

$\pi = 3.142$

$\phi := 0, .1..2\cdot\pi$



ЗАДАНИЕ 4

Вычислить приближенно по методу Монте-Карло площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией, заданной в полярных координатах.

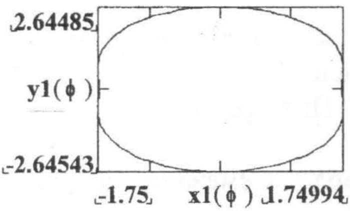
$$\rho^2 = 3\cos^2\varphi + 7\sin^2\varphi$$

РЕШЕНИЕ

$\rho(\phi) := \sqrt{3\cdot\cos(\phi)^2 + 7\cdot\sin(\phi)^2}$ $N := 179$ $i := 1..N$

$x1(\phi) := \rho(\phi)\cdot\cos(\phi)$ $y1(\phi) := \rho(\phi)\cdot\sin(\phi)$

$\phi := 0, .05..2\cdot\pi$ $a := 3$ $b := 3$

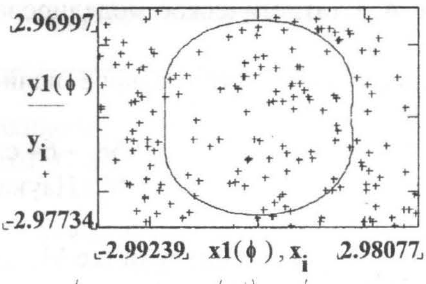


$x_i := rnd(2\cdot a)$

$y_i := rnd(2\cdot b)$

$x_i := x_i - a$

$y_i := y_i - b$



$$\phi\phi_i := \text{if}\left(x_i>0, \text{atan}\left(\frac{y_i}{x_i}\right), \text{if}\left(x_i<0, \text{atan}\left(\frac{y_i}{x_i}\right)+\pi, \text{if}\left(y_i>0, \frac{\pi}{2}, \pi\cdot\frac{3}{2}\right)\right)\right)$$

$\rho\rho_i := \sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2}$ $m_i := \text{if}(\rho\rho_i < \rho(\phi\phi_i), 1, 0)$ $M := \sum_i m_i$ $M = 77$

Проверка

$S := \frac{M}{N}\cdot(a\cdot b\cdot 4)$ $ss := \frac{\pi}{2}\cdot(3+7)$ $ss = 15.708$

$S = 15.486$ $s := \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi\cdot 2}\rho(\phi)^2\,d\phi$ $s = 15.708$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бинер К. Методы Монте-Карло в статистической физике. – М.:Мир, 1982. – 400 с.
2. Соболь И.М. и др. Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло) (СМБ).-М.: Физматгиз, 1962. – 332 с.
3. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах.-М.: 1961. – 226 с.
4. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия/ Гл. редактор Прохоров Ю.В. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2000.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2000, ч.2.
7. Дьяконов В.П. Система MathCAD: Справочник. – М.: Радио и связь, 1993.–128 с.
8. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1975. – 472 с.
9. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. – М.: Наука, 1996. Т.2.
11. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. - М.: Наука, 1968. – 64 с.
12. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
13. Halton J.H. A retrospective and prospective survey of the Monte Carlo Method. SIAM Rev., (1970) 12, N1. – p.1– 63.
14. Hall A. On an experiment determination of π. Messing. Math. (1873) 2. – p.113 – 11.
15. Hammersley J.M., Handcomb D.C. Monte Carlo Method, London – N.Y., 1964.
16. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method, J. Amer. Stat. Assoc. (1949) 44, N 247.– p. 335-341.

Редактор Н.Н. Калинина

Компьютерный набор: Антон Чесноков
Компьютерная верстка: Н.И. Васильева

Подписано к печати 30.01.03 г.
Объем 1 уч.-изд. л. Тираж 250 экз.
Заказ 131 Цена договорная

Редакционно-издательский отдел СПбГУКиТ.
192102. С.-Петербург, ул. Бухарестская, 22.

Подразделение оперативной полиграфии СПбГУКиТ.
192102. С.-Петербург, ул. Бухарестская, 22.