$$\begin{cases}a+b+c+d=6,\\3a+2b+c=0,\\27a+9b+3c+d=2,\\27a+6b+c=0,\end{cases}$$ 解得 $a=1,b=-6,c=9,d=2$,

所求的多项式为 x^3-6x^2+9x+2.

68.【解】显然 $f(x)$ 为偶函数,只研究 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值和最大值.

令 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$ 得 $x=\sqrt{2}$.

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>\sqrt{2}$ 时,$f'(x)<0$,

$x=\sqrt{2}$ 为最大值点,最大值 $M=f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=1+\frac{1}{e^2}$;

$f(0)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt-\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=2-1=1>0$,

故 $f(x)$ 的最小值为 $m=0$,最大值 $M=1+\frac{1}{e^2}$.

69.【解】$F(x)=\int_{-2}^2|x-t|f(t)dt=\int_{-2}^x(x-t)f(t)dt+\int_x^2(t-x)f(t)dt$

$=x\int_{-2}^x f(t)dt-\int_{-2}^x tf(t)dt-\int_2^x tf(t)dt+x\int_2^x f(t)dt$,

$F'(x)=\int_{-2}^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt=\int_{-2}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt+\int_2^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$,

因为 $\int_{-2}^0 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt$,所以 $F'(x)=2\int_0^x f(t)dt$.

因为 $f(x)>0$,所以 $F'(x)=0$ 得 $x=0$,

又因为 $F''(x)=2f(x)$,$F''(0)=2f(0)>0$,所以 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-2,2)$ 内唯一的极小值点,也为最小值点.

70.【解】由 $f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$,

由 $f(0)=0,f(\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1}=\ln(t^2-t+1)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{3}{4}<0$,

$f(1)=\int_0^1\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt=\ln(t^2-t+1)\Big|_0^1=0$,

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值为 0,最小值为 $\ln\frac{3}{4}$.

71.【解】由 $\begin{cases}f'_x=3x^2-3y=0,\\f'_y=3y^2-3x=0,\end{cases}$ 得 $(x,y)=(0,0),(x,y)=(1,1)$.

$f''_{xx}=6x,f''_{xy}=-3,f''_{yy}=6y$,

当 $(x,y)=(0,0)$ 时,$A=0,B=-3,C=0$,因为 $AC-B^2<0$,所以 $(0,0)$ 不是极值点;

当 $(x,y)=(1,1)$ 时,$A=6,B=-3,C=6$,

因为 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$,所以 $(1,1)$ 为极小值点,极小值为 $f(1,1)=-1$.

72.【解】$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=e^{2\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{2\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{2\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$,

$f(0)=f(0-0)=1$，由 $f(0)=f(0-0)=f(0+0)=1$ 得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x>0$ 时，由 $f'(x)=2x^{2x}(1+\ln x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{e}$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=1>0$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$，

则 $x=0$ 为极大值点，极大值为 $f(0)=1$；$x=\dfrac{1}{e}$ 为极小值点，极小值为 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

73.【解】$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{xe^x+1-1}{x}=1$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\ln x}{x}=-\infty$，

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

于是 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(1+\ln x), & x>0,\\ (x+1)e^x, & x<0.\end{cases}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$，$x=\dfrac{1}{e}$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$，

故 $x=-1$ 为极小值点，极小值为 $f(-1)=1-\dfrac{1}{e}$；$x=0$ 为极大值点，极大值为 $f(0)=1$；

$x=\dfrac{1}{e}$ 为极小值点，极小值为 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

74.【证明】设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不恒为零，不妨设存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内取到最大值，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=M>0$，且 $f'(c)=0$，代入得 $f''(c)=f(c)=M>0$，则 $x=c$ 为极小值点，矛盾，即 $f(x)\leqslant0$，同理可证明 $f(x)\geqslant0$，故 $f(x)\equiv0(a\leqslant x\leqslant b)$.

75.【解】由 $y'=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}+(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2+x}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=0$ 得 $x=-1$，$x=0$.

当 $x<-1$ 时，$y'>0$；当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$；当 $x>0$ 时，$y'>0$，

$y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$，单调减区间为 $[-1,0]$，

$x=-1$ 为极大值点，极大值为 $y(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$；$x=0$ 为极小值点，极小值为 $y(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，所以曲线 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 没有水平渐近线；

又因为 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 为连续函数，所以 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 没有铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1\right)-e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\right]$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1}{\frac{1}{x}}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-1=-2,$$

得 $y=x-2$ 为曲线的斜渐近线；

再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=e^{\pi}$，

$$\lim_{x\to+\infty}(y-e^{\pi}x)=\lim_{x\to+\infty}[x(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi})-e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}]$$

$$=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}-1}{\frac{1}{x}}-e^{\pi}=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-e^{\pi}=-2e^{\pi},$$

得 $y=e^{\pi}x-2e^{\pi}$ 为曲线 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的斜渐近线.

76.【解】$x^2y^2+y=1$ 两边关于 x 求导得

$2xy^2+2x^2yy'+y'=0$，解得 $y'=-\frac{2xy^2}{1+2x^2y}$，

由 $y'=-\frac{2xy^2}{1+2x^2y}=0$ 得 $x=0$，

$2xy^2+2x^2yy'+y'=0$ 两边对 x 求导得

$2y^2+8xyy'+2x^2y'^2+2x^2yy''+y''=0$，

将 $x=0,y=1,y'(0)=0$ 代入得 $y''(0)=-2<0$，

故 $x=0$ 为函数 $y=y(x)$ 的极大值点，极大值为 $y(0)=1$.

77.【解】$f(x)=\int_0^1|x-t|\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)\mathrm{d}t$

$$=x^2-\frac{x^2}{2}+\frac{1-x^2}{2}-x(1-x)=x^2-x+\frac{1}{2}.$$

由 $f'(x)=2x-1=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$，

因为 $f(0)=\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},f(1)=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为$\frac{1}{4}$.

78.【证明】方法一

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}$ 等价于 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$.

令 $\varphi(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t},\varphi(0)=0$，

$\varphi'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}>0(t>0)$.

由$\begin{cases}\varphi(0)=0,\\ \varphi'(t)>0(t>0),\end{cases}$得 $\varphi(t)>0(t>0)$,

故当 $x>0$ 时,$\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$,即 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{1+x}$.

方法二

令 $f(t)=\ln t, f'(t)=\dfrac{1}{t}$,由拉格朗日中值定理得

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln x=f(x+1)-f(x)=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}(x<\xi<x+1),$$

从而 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$.

79.【证明】令 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$,

令 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=0$ 得 $x=1, x=k\pi(k=1,2,\cdots)$.

因为当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,

所以 $x=1$ 时,$f(x)$ 取最大值,

$$M=f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^{2n}dt=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)},$$

故当 $x>0$ 时,$\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt\leqslant\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

80.【证明】$e^{-2x}>\dfrac{1-x}{1+x}$ 等价于 $-2x>\ln(1-x)-\ln(1+x)$,

令 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x, f(0)=0$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2=\frac{2x^2}{1-x^2}>0(0<x<1),$$

由$\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(0<x<1).\end{cases}$得 $f(x)>0(0<x<1)$,故当 $0<x<1$ 时,$e^{-2x}>\dfrac{1-x}{1+x}$.

81.【证明】令 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}, f'(x)=\dfrac{x\sec^2x-\tan x}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2x}$,

因为 $\sin x<x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $\cos x\leqslant 1$,所以 $f'(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

即 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增,

从而当 $0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$f(a)<f(b)$,即 $\dfrac{\tan a}{a}<\dfrac{\tan b}{b}$,故 $\dfrac{\tan b}{\tan a}>\dfrac{b}{a}$.

82.【解】由 $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty, \lim\limits_{x\to1}y=\infty$ 得

$x=-1$ 与 $x=1$ 为 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线;

由 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$ 得 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 没有水平渐近线;

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1, \lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=0$ 得 $y=x$ 为曲线 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的斜渐近线.

三、一元函数积分学

1.【答案】$2\ln x-\ln^2 x+C$

【解】由题意得 $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$,

则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln x-\ln^2 x+C$.

2.【答案】$C\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

【解】由 $f(x)=\dfrac{F(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ 得 $\dfrac{F'(x)}{F(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,两边积分得

$\ln F(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln C$,解得 $F(x)=C(x+\sqrt{1+x^2})$,

故 $f(x)=C\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

3.【答案】$-x^2-\ln(1-x)+C$

【解】由 $f'(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$ 得

$f'(x)=1-2x+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-2x$,

则 $f(x)=-x^2-\ln(1-x)+C$.

4.【答案】$-\arctan\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}+C$

【解】
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(5-x)\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{(5-x)\cdot 2\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{1-x})}{2^2+(\sqrt{1-x})^2}$$
$$=-\arctan\frac{\sqrt{1-x}}{2}+C.$$

5.【答案】$\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x^2+1}+C$

【解】
$$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}(x^2+1)$$
$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1)-\int\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}(x^2+1)$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x^2+1}+C.$$

6.【答案】$\dfrac{a^2}{2(1-a)}$

【解】令 $A=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)=x+A$,两边积分得

$A=\dfrac{a^2}{2}+aA$,解得 $A=\dfrac{a^2}{2(1-a)}$.

7.【答案】 $\frac{\pi}{12}$

【解】曲线所围成的平面图形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}(3\theta)=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}.$$

8.【答案】 1

【解】设区域 D 位于第一象限的区域为 D_1,

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $D_1=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\sqrt{\cos 2\theta}\}$,

区域 D_1 的面积为 $A_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{\cos 2\theta})^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}$,

由对称性,区域 D 的面积为 $A=4A_1=1$.

9.【答案】(C)

【解】因为 $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|$ 为奇函数,所以 $P=\int_{-1}^{1}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\mathrm{d}x=0$,

$Q=\int_{-1}^{1}(x^3\cos x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x<0$, $R=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x>0$,

三者的大小为 $Q<P<R$,应选(C).

10.【答案】(1)(A) (2)(B)

【解】(1) $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^{+\infty}=\mathrm{e}^{-1}$ 收敛,应选(A).

事实上,$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$;

$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln|\ln x|=+\infty$;

$\int_{-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-\infty}^{-1}=+\infty$.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=1$ 且 $\alpha=\frac{4}{3}>1$ 得 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4}}$ 发散,同理 $\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4}}$ 发散,故 $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4}}$ 发散,应选(B).

11.【解】由 $f'(\ln x)=1+x$ 得 $f'(x)=1+\mathrm{e}^x$,

则 $f(x)=x+\mathrm{e}^x+C$,

由 $f(0)=1$ 得 $C=0$,故 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$.

12.【解】$f(x)=\int\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\tan t}\int\frac{1-\tan^2 t}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t$

$$=\int(\cos^2 t-\sin^2 t)\mathrm{d}t=\int\cos 2t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sin 2t+C=\sin t\cos t+C=\frac{x}{1+x^2}+C,$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$,故 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}+1$.

13.【解】由 $f'(\ln x)=\begin{cases}\mathrm{e},1\leqslant x\leqslant\mathrm{e},\\ x,x>\mathrm{e}.\end{cases}$ 得 $f'(x)=\begin{cases}\mathrm{e},0\leqslant x\leqslant1,\\ \mathrm{e}^x,x>1.\end{cases}$

则 $f(x)=\begin{cases}ex+C_1, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ e^x+C_2, x>1.\end{cases}$

由 $f'(x)$ 连续得 $f(x)$ 连续，

又由 $f(1-0)=f(1)=e+C_1, f(1+0)=e+C_2$ 且 $f(1)=e$ 得 $C_1=C_2=0$，

故 $f(x)=\begin{cases}ex, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ e^x, x>1.\end{cases}$

14.【解】$\int_0^{f(x)} g(t)dt=\frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$ 两边求导得

$g[f(x)]f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$，即 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，于是 $f(x)=\sqrt{x}+C$.

由 $f(4)=0$ 得 $C=-2$，故 $f(x)=\sqrt{x}-2$.

15.【解】$\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$ 两边求导得

$g[f(x)]f'(x)=(x^2+2x)e^x$，整理得 $f'(x)=(x+2)e^x$，则 $f(x)=(x+1)e^x+C$，
由 $f(0)=0$ 得 $C=-1$，故 $f(x)=(x+1)e^x-1$.

16.【解】由 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1\\ \sqrt{x}, & x>1\end{cases}$ 得

$f'(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ e^{\frac{x}{2}}, & x>0.\end{cases}$ 从而 $f(x)=\begin{cases}x+C_1, & x\leqslant 0,\\ 2e^{\frac{x}{2}}+C_2, & x>0.\end{cases}$

由 $f(0)=0$ 得 $C_1=0, C_2=-2$，故 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ 2e^{\frac{x}{2}}-2, & x>0.\end{cases}$

17.【解】$\int\frac{dx}{x\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

当 $x>1$ 时，$\int\frac{d(\ln x)}{\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x\sqrt{\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2+1}}=-\int\frac{d\left(\frac{1}{\ln x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2+1}}$

$$=-\ln\left|\frac{1}{\ln x}+\sqrt{\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2+1}\right|+C$$

$$=\ln|\ln x|-\ln(1+\sqrt{1+\ln^2 x})+C;$$

当 $0<x<1$ 时，$\int\frac{d(\ln x)}{\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}=-\int\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x\sqrt{\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2+1}}=\int\frac{d\left(\frac{1}{\ln x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2+1}}$

$$=\ln\left|\frac{1}{\ln x}+\sqrt{\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2+1}\right|+C$$

$$=\ln|\ln x|-\ln(1+\sqrt{1+\ln^2 x})+C,$$

故 $\int\frac{dx}{x\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}=\ln|\ln x|-\ln(1+\sqrt{1+\ln^2 x})+C$.

18.【解】 $\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}dx=\frac{1}{5}\int \frac{x^{10}}{(x^5+1)^4}d(x^5)\xlongequal{x^5=t}\frac{1}{5}\int \frac{t^2}{(t+1)^4}dt$

$=\frac{1}{5}\int \frac{(t+1)^2-2(t+1)+1}{(t+1)^4}dt$

$=\frac{1}{5}\int [(t+1)^{-2}-2(t+1)^{-3}+(t+1)^{-4}]dt$

$=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{3(t+1)^3}\right]+C$

$=-\frac{1}{5(x^5+1)}+\frac{1}{5(x^5+1)^2}-\frac{1}{15(x^5+1)^3}+C.$

19.【解】 $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}=\int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}+C.$

20.【解】 $\int x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int x^2e^{x^2}d(x^2)\xlongequal{x^2=t}\frac{1}{2}\int te^t dt=\frac{1}{2}(t-1)e^t+C=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C.$

21.【解】 $\int \sin^4 x\cos^3 x dx=\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)d(\sin x)$

$=\int(\sin^4 x-\sin^6 x)d(\sin x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$

22.【解】 $\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}=\int \frac{dx}{2\sin x\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{2\sin x},$

由 $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ 得 $\frac{1}{2\sin x}=\frac{1}{4}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\right),$

于是 $\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{4}\int\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\right)d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

23.【解】 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx=-\int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

$=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}+2\int\frac{dx}{x^2}$

$=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C.$

24.【解】 令 $\frac{x-1}{2x^2+x-1}=\frac{x-1}{(x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1},$

由 $A(2x-1)+B(x+1)=x-1$ 得 $\begin{cases}2A+B=1,\\-A+B=-1.\end{cases}$ 解得 $A=\frac{2}{3},B=-\frac{1}{3},$

故 $\int\frac{x-1}{2x^2+x-1}dx=\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|2x-1|+C.$

25.【解】$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx=\int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx$

$=\int \frac{d(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)=\ln\frac{xe^x}{1+xe^x}+C.$

26.【解】$\int \frac{1+\ln(1-x)}{x^2}dx=-\int[1+\ln(1-x)]d\left(\frac{1}{x}\right)$

$=-\frac{1+\ln(1-x)}{x}+\int\frac{1}{x(x-1)}dx$

$=-\frac{1+\ln(1-x)}{x}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$

27.【解】$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}\xlongequal{x=2\sec t}\int\frac{2\sec t\tan t}{4\sec^2 t\cdot 2\tan t}dt=\frac{1}{4}\int\cos t\,dt=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C.$

28.【解】$I=\int\cos(\ln x)dx\xlongequal{x=e^t}\int e^t\cos t\,dt=\int e^t d(\sin t)$

$=e^t\sin t-\int e^t\sin t\,dt=e^t\sin t+\int e^t d(\cos t)=e^t\sin t+e^t\cos t-I,$

则$\int\cos(\ln x)dx=\frac{1}{2}e^t(\sin t+\cos t)+C=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C.$

29.【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^3\frac{i-1}{n}=\int_0^1\sin^3 x\,dx=\int_0^1(\cos^2 x-1)d(\cos x)$

$=\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^1-\cos x\Big|_0^1=\frac{\cos^3 1-1}{3}-\cos 1+1=\frac{\cos^3 1}{3}-\cos 1+\frac{2}{3}.$

30.【解】由$\int_0^x tf(x-t)dt\xlongequal{x-t=u}x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$ 得

$x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=1-\cos x$，两边求导得

$\int_0^x f(u)du=\sin x$，故$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=1.$

31.【解】令$\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+Ax^3$，两边在$[0,1]$上积分得

$A=\frac{\pi}{4}+\frac{A}{4}$，解得$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{3}.$

32.【解】令$\int_0^2 f(x)dx=A$，$\int_0^1 f(x)dx=B$，则 $f(x)=x^2-Ax+2B$，

两边在$[0,2]$上积分得

$A=\int_0^2(x^2-Ax+2B)dx=\frac{8}{3}-2A+4B$，即 $3A-4B=\frac{8}{3}$；

两边在$[0,1]$上积分得 $B=\frac{1}{3}-\frac{A}{2}+2B$，即 $3A-6B=2$，

解得 $A=\frac{4}{3}$，$B=\frac{1}{3}$，故 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}.$

33.【解】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$$=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}dx=\frac{\pi}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\ln 2.$$

34.【解】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$$=\frac{1}{\sin x+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

35.【解】$\int_0^1 x\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin x\,d(x^2)=\frac{x^2}{2}\arcsin x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\xlongequal{x=\sin t}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

36.【解】$\int_{-a}^{a}(x-a)\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-2a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$\xlongequal{x=a\sin t}-2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t\,dt=-2a^3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi a^3}{2}.$$

37.【解】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x^2)\sin x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d(\cos x)$$

$$=-2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2.$$

38.【解】$\int_{-2}^{2}\left(x^3\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx\xlongequal{x=2\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t\,dt=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi.$$

39.【解】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-1+\frac{2}{1+\cos x}\right)dx=-\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}$$

$$=-\pi+4\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4-\pi.$$

40.【解】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\,dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\,d(\cos x)$$

$$=-\frac{4}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$$

41.【解】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+f(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{1+f(x)}+\frac{\cos(-x)}{1+f(-x)}\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{1+f(x)}+\frac{\cos x}{1+\frac{1}{f(x)}}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1.$$

42.【解】 $\int_{-1}^{2}x e^{-|x|}dx=\int_{-1}^{1}x e^{-|x|}dx+\int_{1}^{2}x e^{-|x|}dx$

$$=\int_1^2 x e^{-x}dx=-\int_1^2 x\,d(e^{-x})=-x e^{-x}\Big|_1^2+\int_1^2 e^{-x}dx=2e^{-1}-3e^{-2}.$$

43.【解】 $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_0^3\frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^3=\frac{2\pi}{3}.$

44.【解】 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=\frac{1}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}.$

45.【解】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\cos x+2\sin x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\,dx}{(1+2\tan x)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+2\tan x)}{(1+2\tan x)^2}$

$$=-\frac{1}{2(1+2\tan x)}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

46.【解】 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=-\int_0^1\ln(1+x)\,d\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$$=-\frac{\ln(1+x)}{x-2}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx$$

$$=\ln 2+\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\ln 2+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Big|_0^1=\ln 2-\frac{2}{3}\ln 2=\frac{1}{3}\ln 2.$$

47.【解】 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sec^2 t}{\sec t(2\tan^2 t+1)}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos t(2\tan^2 t+1)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=\arctan\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\arctan\frac{1}{2}.$$

48.【解】 $\int_0^1\frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}dx\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t(1+\cos 2t)\,dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\cos 2t\,dt=\frac{\pi^2}{64}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\,d(\sin 2t)$$

$$=\frac{\pi^2}{64}+\frac{1}{4}t\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt=\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}.$$

49.【解】 $\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec t(\tan t+1)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin t+\cos t}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}-1).$$

50.【解】 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 t-\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\pi+2=2-\frac{\pi}{2}.$$

51.【解】 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)=\pi\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^1\left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\pi+2\pi\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{2}-\pi.$$

52.【解】 $\int_0^{\pi}\frac{x\,|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x}=\frac{\pi}{2}\arctan\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}.$$

53.【解】 $\int_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)\,|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{2\pi}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\mathrm{d}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\cos x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{2\pi}\cos x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x\xlongequal{x-\pi=t}2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+\pi)\,|\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t=-4\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}(2t)=\cos 2t\Big|_0^{\pi}=0.$$

54.【解】 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x^2-1}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}=-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$

$$=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}x}\Big|_1^{+\infty}=-\left(0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

55.【解】 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^3}\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-\mathrm{d}t}{1+\tan^3 t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cot x)^3}{1+(\cot x)^3}\mathrm{d}x$,

$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^3}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cot x)^3}{1+(\cot x)^3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^3}=\frac{\pi}{4}$.

56.【解】 $\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$,

由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$ 得

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,\mathrm{d}(2x)=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I \text{ 得 } I=-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

故$\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)\,dx=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$

57.【解】$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}=\frac{1}{e^2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{x-1}+e^{1-x}}=\frac{1}{e^2}\int_1^{+\infty}\frac{d(e^{x-1})}{1+(e^{x-1})^2}$

$$=\frac{1}{e^2}\arctan e^{x-1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4e^2}.$$

58.【解】$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{d(x^2)}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(0-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$

59.【解】$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=1.$

60.【证明】$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx\xlongequal{x+t=1}\int_1^0(1-t)^m t^n(-dt)=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx.$

$$I=\int_0^1 x(1-x)^{50}dx=\int_0^1 x^{50}(1-x)\,dx=\int_0^1 x^{50}dx-\int_0^1 x^{51}dx=\frac{1}{51}-\frac{1}{52}=\frac{1}{2652}.$$

61.【解】$\int_0^{2\pi}f(x-\pi)\,dx=\int_0^{2\pi}f(x-\pi)\,d(x-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$

$$=\int_{-\pi}^0 f(x)\,dx+\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^0(-1)\,dx+\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$

$$=-\pi+\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=0.$$

62.【解】$\int_1^3 f(x-2)\,dx=\int_1^3 f(x-2)\,d(x-2)=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

$$=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

由$\int_{-1}^0\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$ 得$\int_1^3 f(x-2)\,dx=\frac{3\pi}{4}.$

63.【解】由$f(0)=0$得$f(x)=\int_0^x\arcsin(t-1)^2dt$,则

$$\int_0^1 f(x)\,dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\arcsin(x-1)^2dx$$

$$=f(1)-\int_0^1[(x-1)+1]\arcsin(x-1)^2dx$$

$$=f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin(x-1)^2d(x-1)^2-\int_0^1\arcsin(x-1)^2dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin(x-1)^2d(x-1)^2=-\frac{1}{2}\int_1^0\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

64.【证明】$I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,dx\xlongequal{x+t=\pi}\int_{\pi}^0(\pi-t)f(\sin t)(-dt)$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x-I,$$

则$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{3+\cos^2x}$$

$$=-\frac{\pi}{\sqrt3}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{6\sqrt3}.$$

65.【证明】由 $|f(x)|=|f(x)-f(1)|=|\arctan x-\arctan 1|=\left|\arctan x-\frac{\pi}{4}\right|$得

$$\left|\int_0^1f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left|\arctan x-\frac{\pi}{4}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}-\arctan x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-x\arctan x\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln2.$$

66.【证明】$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}a^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos x}\mathrm{d}x$,则

$$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{\frac{\cos x}{2}})^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{-\frac{\cos x}{2}})^2\mathrm{d}x\geqslant\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\frac{\cos x}{2}}\cdot a^{-\frac{\cos x}{2}}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^3}{4}.$$

67.【证明】$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

$$=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_1^{+\infty}=1+\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

68.【证明】令$F(x,y)=[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]$, $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$,

因为$f(x),g(x)$在$[a,b]$上为增函数,所以$F(x,y)\geqslant0$,从而$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^bF(x,y)\mathrm{d}y\geqslant0$,

而$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^bF(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b[f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(y)]\mathrm{d}y$

$$=(b-a)\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\int_a^bg(y)\mathrm{d}y-$$

$$\int_a^bg(x)\mathrm{d}x\int_a^bf(y)\mathrm{d}y+(b-a)\int_a^bf(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$=2(b-a)\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x-2\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\int_a^bg(x)\mathrm{d}x,$$

故$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\int_a^bg(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x$.

69.【证明】$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$=\left[\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\left[\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right]+\cdots+\left[\int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right]\mathrm{d}x+\cdots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}\left[f(x)-f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\mathrm{d}x$$，则

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\mathrm{d}x+\cdots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}\left|f(x)-f\left(\frac{n}{n}\right)\right|\mathrm{d}x$$

由 $\left|f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|f'(\xi_1)\right|\left(\frac{1}{n}-x\right)\leqslant M\left(\frac{1}{n}-x\right)\left(x<\xi_1<\frac{1}{n}\right)$ 得

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{M}{2n^2},$$

同理 $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2n^2},\cdots,\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}\left|f(x)-f\left(\frac{n}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2n^2}$，

故 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$.

70.【证明】 因为 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(0)\leqslant f(2\pi)$，从而 $f(2\pi)-f(0)\geqslant 0$.

由 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}(\cos nx)$

$$=-\frac{1}{n}f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$ 得

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|f'(x)\cos nx|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)].$$

71.【证明】 因为 $f(x)$ 有界，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)=0$，

于是 $\mathrm{e}^{-x}f(x)\Big|_x^{+\infty}=\int_x^{+\infty}[\mathrm{e}^{-x}f(x)]'\mathrm{d}x$，

即 $-\mathrm{e}^{-x}f(x)=\int_x^{+\infty}-\mathrm{e}^{-x}[f(x)-f'(x)]\mathrm{d}x$，两边取绝对值得

$\mathrm{e}^{-x}|f(x)|\leqslant\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|f(x)-f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}$，故 $|f(x)|\leqslant 1$.

72.【证明】 令 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x-a}{2}[f(x)+f(a)]$，$\varphi(a)=0$，

$$\varphi'(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(x)+f(a)]-\frac{x-a}{2}f'(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(a)]-\frac{x-a}{2}f'(x);$$

$$\varphi'(x)=\frac{x-a}{2}[f'(\xi)-f'(x)](a<\xi<x),$$

因为 $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 单调递减，从而 $\varphi'(x)>0(a<x<b)$.

由 $\begin{cases}\varphi(a)=0,\\ \varphi'(x)>0(a<x<b),\end{cases}$ 得 $\varphi(x)\geqslant 0(a<x<b)$，

于是 $\varphi(b)\geqslant 0$，故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.

73.【证明】 由泰勒公式得 $f(x)=f'(1)(x-1)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2$，其中 ξ 位于 1 与 x 之间，

积分得 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x$，

则 $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{M}{2}\int_0^2(x-1)^2\mathrm{d}x=M\int_1^2(x-1)^2\mathrm{d}x=\dfrac{M}{3}$.

74.【解】 $l=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+\cos t)\mathrm{d}t=4.$$

75.【解】 $S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$

则 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}x^3+x^2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$

76.【解】 所求的面积为 $A=\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\Gamma(1)=2$.

77.【解】 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

由 $f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin^4 x$ 得 $\left[\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)^2\right]'=2\sin^4 x$，

$\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)^2=\int_0^x 2\sin^4 x\mathrm{d}x+C$，取 $x=0$ 得 $C=0$，即 $\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)^2=\int_0^x 2\sin^4 t\mathrm{d}t$.

取 $x=\pi$，则 $\left(\int_0^{\pi} f(u)\mathrm{d}u\right)^2=\int_0^{\pi}2\sin^4 t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t=4\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{4}$，

从而 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3\pi}}{2}$，$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值为 $\bar{f}=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}$.

78.【解】 由 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $(0,0)$ 及 $(1,2)$ 得 $\begin{cases}c=0,\\ a+b=2.\end{cases}$ 则 $y=ax^2+(2-a)x$.

令 $ax^2+(2-a)x=-x^2+2x$ 得 $x=0$ 及 $x=\dfrac{a}{a+1}$.

所求面积为 $S(a)=\int_{\frac{a}{a+1}}^0[-x^2+2x-ax^2-(2-a)x]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{a}{a+1}}[(a+1)x^2-ax]\mathrm{d}x=-\frac{a^3}{6(a+1)^2},$$

令 $S'(a)=-\dfrac{18a^2(a+1)^2-12a^3(a+1)}{36(a+1)^4}=-\dfrac{3a^2(a+1)-2a^3}{6(a+1)^3}=-\dfrac{a^2(a+3)}{6(a+1)^3}=0$，

得 $a=-3$，

且当 $a<-3$ 时，$S'(a)<0$；当 $a>-3$ 时，$S'(a)>0$，

故当 $a=-3$ 时，所围成的面积最小，此时 $a=-3,b=5,c=0$.

79.【解】 当 $-1<x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}(t+1)\mathrm{d}t=\frac{(t+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{x}=\frac{(x+1)^2}{2}$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=\int_{-1}^{0}(t+1)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}$，

即 $f(x)=\begin{cases}\frac{(x+1)^2}{2}, & -1<x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}, & x>0.\end{cases}$

由 $\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}=0$ 得 $x=1+\sqrt{2}$，

故所求的面积为 $A=\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)^2}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2})\mathrm{d}x=\frac{1}{6}+\frac{5+3\sqrt{2}}{6}=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

80.【解】 $V=\pi\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\int_{0}^{+\infty}(2x)^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(2x)$

$$=\frac{\pi}{8}\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\Gamma(3)=\frac{\pi}{4}.$$

81.【解】 $V_1=\pi a^{\frac{5}{2}}-\pi\int_{0}^{\sqrt{a}}x^4\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}a^{\frac{5}{2}}$，

$V_2=\pi\int_{\sqrt{a}}^{1}x^4\mathrm{d}x-\pi a^2(1-\sqrt{a})=\frac{\pi}{5}-\pi a^2+\frac{4\pi}{5}a^{\frac{5}{2}}$，

由 $\frac{4\pi}{5}a^{\frac{5}{2}}=\frac{\pi}{5}-\pi a^2+\frac{4\pi}{5}a^{\frac{5}{2}}$ 得 $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

82.【解】(1) 由 $\begin{cases}a\sqrt{x_0}=\frac{1}{2}\ln x_0,\\ \frac{a}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0},\end{cases}$ 得 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$，切点坐标为 $(\mathrm{e}^2,1)$.

(2) 所求体积为 $V=V_1+V_2$，

其中 $V_1=\pi\int_{0}^{1}\left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{1}\frac{x}{\mathrm{e}^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}$；

$$V_2=\pi\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^2}-\frac{1}{4}\ln^2 x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}x^2\Big|_{1}^{\mathrm{e}^2}-\frac{\pi}{4}\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\ln^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}(\mathrm{e}^4-1)-\frac{\pi}{4}\left(x\ln^2 x\Big|_{1}^{\mathrm{e}^2}-2\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}-\pi\mathrm{e}^2+\frac{\pi}{2}\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}-\pi\mathrm{e}^2+\frac{\pi}{2}\left(x\ln x\Big|_{1}^{\mathrm{e}^2}-\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}-\pi\mathrm{e}^2+\pi\mathrm{e}^2-\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2-1)=-\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}+\frac{\pi}{2}，$$

故 $V=\frac{\pi}{2}$.

四、多元函数微分学

1.【答案】 1

【解】$f'_x=e^x yz^2+2e^x yz\frac{\partial z}{\partial x}$,

$x+y+z+xyz=0$ 两边关于 x 求偏导得 $1+\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$,

将 $x=0,y=1,z=-1$ 代入得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=0$,故 $f'_x(0,1,-1)=1$.

2.【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{2}{e}$

【解】$\ln z=\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}$,两边关于 x 求偏导得

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y},$$

从而 $\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y}\right)$,故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{2}{e}$.

3.【答案】 1

【解】两边关于 x 求偏导得 $2\cos(x+2y-3z)\left(1-3\frac{\partial z}{\partial x}\right)=1-3\frac{\partial z}{\partial x}$,解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{3}$;

$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 两边关于 y 求偏导得

$2\cos(x+2y-3z)\left(2-3\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2-3\frac{\partial z}{\partial y}$,解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}$,故 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

4.【答案】 47

【解】$\varphi'(x)=f'_x(x,f(x,2x))+f'_y(x,f(x,2x))\cdot[f'_x(x,2x)+2f'_y(x,2x)]$,

则 $\varphi'(1)=f'_x(1,f(1,2))+f'_y(1,f(1,2))\cdot[f'_x(1,2)+2f'_y(1,2)]$

$=f'_x(1,2)+f'_y(1,2)\cdot[f'_x(1,2)+2f'_y(1,2)]=3+4(3+8)=47$.

5.【答案】 -2

【解】令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$ 得 $f(x,y)=-3x+4y+o(\rho)$,

由二元函数可全微定义得 $f'_x(0,0)=-3,f'_y(0,0)=4$,

故 $2f'_x(0,0)+f'_y(0,0)=-2$.

6.【答案】 $\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$

【解】$x=e,y=0$ 时,$z=1$.

$x=ze^{y+z}$ 两边关于 x 求偏导得 $1=\frac{\partial z}{\partial x}e^{y+z}+ze^{y+z}\frac{\partial z}{\partial x}$,代入得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}$;

$x=ze^{y+z}$ 两边关于 y 求偏导得$\frac{\partial z}{\partial y}e^{y+z}+ze^{y+z}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$,代入得$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(e,0)}=-\frac{1}{2}$,

故 $\left.dz\right|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$.

7.【答案】(D)

【解】取 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\0,\quad(x,y)=(0,0).\end{cases}$

显然 $f(x,y)$ 在(0,0)处偏导数存在,但$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在,所以应选(D).

8.【解】由$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$得 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续.

由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 得 $f'_x(0,0)=0$,

由$\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2}$ 得 $f'_y(0,0)=\frac{\pi}{2}$,$f(x,y)$ 在(0,0)可偏导.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=y\arctan\frac{1}{\rho}$,

$$\lim_{\rho\to0}\frac{y\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{y}{\rho}\cdot\left(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}\right),$$

因为 $\left|\frac{y}{\rho}\right|\leqslant1$ 且$\lim\limits_{\rho\to0}\arctan\frac{1}{\rho}=\frac{\pi}{2}$,所以$\lim\limits_{\rho\to0}\frac{y}{\rho}\cdot\left(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}\right)=0$,

即 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微.

9.【解】$f(x,2x)=x^2$ 两边关于 x 求导得 $f'_x(x,2x)+2f'_y(x,2x)=2x$,

由 $f'_x(x,2x)=x$ 得 $f'_y(x,2x)=\frac{x}{2}$,

$f'_x(x,2x)=x$ 两边关于 x 求导得 $f''_{xx}(x,2x)+2f''_{xy}(x,2x)=1$,

$f'_y(x,2x)=\frac{x}{2}$ 两边关于 x 求导得 $f''_{yx}(x,2x)+2f''_{yy}(x,2x)=\frac{1}{2}$,解得 $f''_{xx}(x,2x)=0$.

10.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$,

则 $dz=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$.

11.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

则 $dz=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dx+(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dy$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}-(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\left[1-\frac{(2x+y)x}{x^2+y^2}\right]\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}=\frac{y^2-x^2-xy}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}.$$

12.【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\arctan\frac{y}{x}+x^2\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)-y^2\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}$

$$=2x\arctan\frac{y}{x}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}-\frac{y^3}{x^2+y^2},\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{\pi}{2}-1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}-2y\arctan\frac{x}{y}-y^2\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$=\frac{x^3}{x^2+y^2}-2y\arctan\frac{x}{y}+\frac{xy^2}{x^2+y^2},\quad\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1-\frac{\pi}{2},$$

$\mathrm{d}z\,|_{(1,1)}=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\mathrm{d}x+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}y.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}-\frac{x^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{3y^2(x^2+y^2)-2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^4-y^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

13.【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y f'_1+2xf'_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y f'_1+\mathrm{e}^x\sin y(\mathrm{e}^x\cos y f''_{11}+2yf''_{12})+2x(\mathrm{e}^x\cos y f''_{21}+2yf''_{22})$$

$$=\mathrm{e}^x\cos y f'_1+\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y f''_{11}+2\mathrm{e}^x(y\sin y+x\cos y)f''_{12}+4xyf''_{22}.$$

14.【解】 $u'_x=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$, $u'_y=f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)+g'\left(\frac{y}{x}\right)$,

$$u''_{xx}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$u''_{xy}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

则 $xu''_{xx}+yu''_{xy}=\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=0.$

15.【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'+\mathrm{e}^xg'_1$, $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^3}f''+\mathrm{e}^x\cos y g''_{12}$.

16.【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot\mathrm{e}^y+f'_x$, $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^yf'_u+\mathrm{e}^y(x\mathrm{e}^yf''_{uu}+f''_{uy})+x\mathrm{e}^yf''_{xu}+f''_{xy}$.

17.【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2f'_1+y\cos xf'_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(-f''_{11}+\sin xf''_{12})+\cos xf'_2+y\cos x(-f''_{21}+\sin xf''_{22})$$

$=-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+\cos x f'_2+y\sin x\cos x f''_{22}.$

18.【解】 $\frac{\partial g}{\partial x}=yf'_1+xf'_2$，

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y(yf''_{11}+xf''_{12})+f'_2+x(yf''_{21}+xf''_{22})=y^2f''_{11}+2xyf''_{12}+x^2f''_{22}+f'_2$，

$\frac{\partial g}{\partial y}=xf'_1-yf'_2$，

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x(xf''_{11}-yf''_{12})-f'_2-y(xf''_{21}-yf''_{22})=x^2f''_{11}-2xyf''_{12}+y^2f''_{22}-f'_2$，

则 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f''_{11}+f''_{22})=x^2+y^2$.

19.【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf'$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f-2y^2f'$，

则 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'+\frac{1}{y}f-2yf'=\frac{1}{y}f$.

20.【解】 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边关于 x 求偏导得

$-\frac{y}{x^2}F'_1+\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}F'_2=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2}$；

$F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边关于 y 求偏导得 $\frac{1}{x}F'_1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}F'_2=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1}{F'_2}$，

故 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF'_1+zF'_2}{F'_2}-\frac{yF'_1}{F'_2}=z$.

21.【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f+x[f'_1+f'_2\cdot(-\tan x)+f'_3\cdot x^{\sin y-1}\cdot\sin y]$

$=f+xf'_1-x\tan x f'_2+x^{\sin y}\sin y f'_3$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'_3x^{\sin y}\cos y\ln x$.

22.【解】方法一

$z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 两边关于 x,y 求偏导得

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}-1+e^{z-y-x}+xe^{z-y-x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}-1+xe^{z-y-x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}},\\ \frac{\partial z}{\partial y}=1,\end{cases}$$

故 $dz=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$.

方法二

$z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 两边微分得 $dz-dy-dx+d(xe^{z-y-x})=0$，

即 $dz-dy-dx+(e^{z-y-x}-xe^{z-y-x})dx-xe^{z-y-x}dy+xe^{z-y-x}dz=0$，

解得 $dz=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$.

23.【解】$\varphi(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$ 两边关于 x 求偏导得

$\varphi'_1\cdot b\dfrac{\partial z}{\partial x}+\varphi'_2\cdot\left(c-a\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\varphi'_3\cdot(-b)=0$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{b\varphi'_3-c\varphi'_2}{b\varphi'_1-a\varphi'_2}$;

$\varphi(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$ 两边关于 y 求偏导得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{c\varphi'_1-a\varphi'_3}{b\varphi'_1-a\varphi'_2}$,

故 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{ab\varphi'_3-ac\varphi'_2}{b\varphi'_1-a\varphi'_2}+\dfrac{bc\varphi'_1-ab\varphi'_3}{b\varphi'_1-a\varphi'_2}=\dfrac{bc\varphi'_1-ac\varphi'_2}{b\varphi'_1-a\varphi'_2}=c$.

24.【解】$f(y-x,yz)=0$ 两边关于 x 求偏导得 $-f'_1+yf'_2\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f'_1}{yf'_2}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{yf'_2\left(-f''_{11}+yf''_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\right)-yf'_1\left(-f''_{21}+yf''_{22}\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{y^2f'^2_2}=\frac{2f'_1f'_2f''_{12}-f'^2_2f''_{11}-f'^2_1f''_{22}}{yf'^3_2}.$$

25.【解】$x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$ 两边关于 x 求偏导得

$2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf(z^2)+2xyzf'(z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-yf(z^2)}{2xyzf'(z^2)-2z}$,

同理$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-xf(z^2)}{2xyzf'(z^2)-2z}$,

故 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x^2-xyf(z^2)}{2xyzf'(z^2)-2z}+\dfrac{2y^2-xyf(z^2)}{2xyzf'(z^2)-2z}=\dfrac{x^2+y^2-xyf(z^2)}{xyzf'(z^2)-z}$.

26.【解】$x=f(y+z,y+x)$ 两边关于 x 求偏导得 $1=f'_1\dfrac{\partial z}{\partial x}+f'_2$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-f'_2}{f'_1}$;

$x=f(y+z,y+x)$ 两边关于 y 求偏导得 $f'_1\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+f'_2=0$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f'_1+f'_2}{f'_1}$,

则 $\mathrm{d}z=\dfrac{1-f'_2}{f'_1}\mathrm{d}x-\dfrac{f'_1+f'_2}{f'_1}\mathrm{d}y$.

27.【解】由$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+\varphi(x)$,

从而 $z(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x+\varphi(y)$,

由 $z(x,0)=x$ 得$\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x+\varphi(0)=x$,从而 $\varphi(x)=1,\varphi(0)=0$;

再由 $z(0,y)=y^2$ 得 $\varphi(y)=y^2$,故 $z(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+y^2$.

28.【解】由$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+\varphi(x)$,

由 $f'_y(x,0)=x$ 得 $\varphi(x)=x$,即$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+x$,

从而 $z=y^2+xy+\varphi(x)$,再由 $f(x,0)=1$ 得 $\varphi(x)=1$,故 $f(x,y)=y^2+xy+1$.

29.【证明】由 $f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$ 得

$f(x,y)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$,

由可微的定义得 $f(1,0)=0$, $f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$.

$\frac{\partial g}{\partial x}=ye^{xy}f'_1+2xf'_2$， $\frac{\partial g}{\partial y}=xe^{xy}f'_1+2yf'_2$， $g'_x(0,0)=0$， $g'_y(0,0)=0$.

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2e^{xy}f'_1+ye^{xy}(ye^{xy}f''_{11}+2xf''_{12})+2f'_2+2x(ye^{xy}f''_{21}+2xf''_{22})$，

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=(e^{xy}+xye^{xy})f'_1+ye^{xy}(xe^{xy}f''_{11}+2yf''_{12})+2x(xe^{xy}f''_{21}+2yf''_{22})$，

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2e^{xy}f'_1+xe^{xy}(xe^{xy}f''_{11}+2yf''_{12})+2f'_2+2y(xe^{xy}f''_{21}+2yf''_{22})$，

则 $A=g''_{xx}(0,0)=-2$， $B=g''_{xy}(0,0)=-1$， $C=g''_{yy}(0,0)=-2$，

因为 $AC-B^2=3>0$ 且 $A<0$，所以 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取到极大值，极大值为 $g(0,0)=0$.

30.【解】 当 (x,y) 在区域 D 内时，

由 $\begin{cases}z'_x=3x^2-3y=0,\\z'_y=3y^2-3x=0.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ $f(1,1)=-1$；

在 $L_1:y=-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 上，$z=x^3+3x-1$，

因为 $z'=3x^2+3>0$，所以最小值为 $z(0)=-1$，最大值为 $z(2)=13$；

在 $L_2:y=2(0\leqslant x\leqslant 2)$ 上，$z=x^3-6x+8$，

由 $z'=3x^2-6=0$ 得 $x=\sqrt{2}$，$z(0)=8$，$z(\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$，$z(2)=4$；

在 $L_3:x=0(-1\leqslant y\leqslant 2)$ 上，$z=y^3$，

由 $z'=3y^2=0$ 得 $y=0$，$z(-1)=-1$，$z(0)=0$，$z(2)=8$；

在 $L_4:x=2(-1\leqslant y\leqslant 2)$ 上，$z=y^3-6y+8$，

由 $z'=3y^2-6=0$ 得 $y=\sqrt{2}$，$z(-1)=13$，$z(\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$，$z(2)=4$，

故 $z=x^3+y^3-3xy$ 在 D 上的最小值为 $m=-1$，最大值为 $M=13$.

31.【解】 当 $x^2+y^2<18$ 时，

由 $\begin{cases}f'_x=4-2x=0,\\f'_y=-4-2y=0,\end{cases}$ 得 $x=2$，$y=-2$，$f(2,-2)=8$；

当 $x^2+y^2=18$ 时，令 $F=4x-4y-x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-18)$，

由 $\begin{cases}F'_x=4-2x+2\lambda x=0,\\F'_y=-4-2y+2\lambda y=0,\\F'_\lambda=x^2+y^2-18=0,\end{cases}$ 得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{5}{3}$.

当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$\begin{cases}x=3,\\y=-3,\end{cases}$ 当 $\lambda=\frac{5}{3}$ 时，$\begin{cases}x=-3,\\y=3.\end{cases}$

而 $f(3,-3)=6$，$f(-3,3)=-42$，

故 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最小值为 $m=-42$，最大值为 $M=8$.

32.【解】 当 (x,y) 位于区域 D 内时，

由 $\begin{cases}z'_x=2x-2xy^2=0,\\z'_y=4y-2x^2y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\sqrt{2},\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\y=1,\end{cases}$

$z(-\sqrt{2},1)=2$， $z(\sqrt{2},1)=2$；

在 $L_1:y=0(-2\leqslant x\leqslant 2)$ 上，$z=x^2$，由 $z'=2x=0$ 得 $x=0$，

$z(\pm 2)=4,\quad z(0)=0;$

在 $L_2:\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t,\end{cases}(0\leqslant t\leqslant \pi)$ 上,

$$z=4\cos^2 t+8\sin^2 t-16\sin^2 t\cos^2 t=4+4\sin^2 t-16\sin^2 t(1-\sin^2 t)$$

$$=4-12\sin^2 t+16\sin^4 t=16\left(\sin^2 t-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{4},$$

当 $\sin^2 t=1$ 时,z 的最大值为 8;当 $\sin^2 t=\frac{3}{8}$ 时,z 的最小值为 $\frac{7}{4}$,

故 z 的最小值为 0,最大值为 8.

33.【解】 令 $F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$,

由 $\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0,\\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0,\\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0,\\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0,\\ F'_\mu=x+y+z-4=0.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=-2,\\ z=8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=2,\end{cases}$

当 $\begin{cases}x=-2,\\ y=-2,\\ z=8\end{cases}$ 时,$u=72$;当 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=2\end{cases}$ 时,$u=6$,故 u 的最小值为 6,最大值为 72.

五、重积分

1.【答案】 1

【解】 由积分中值定理,存在 $(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint_D e^{x^2-2y^2}\cos(2x+y)\,dx\,dy=\pi r^2\cdot e^{\xi^2-2\eta^2}\cos(2\xi+\eta),$$

则 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-2y^2}\cos(2x+y)\,dx\,dy=\lim\limits_{r\to 0^+}e^{\xi^2-2\eta^2}\cos(2\xi+\eta)=1.$

2.【答案】 $y^2+\frac{\pi a^4}{4}x$

【解】 令 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}f(x,y)\,dx\,dy=A$,

则 $f(x,y)=y^2+Ax$,两边积分得

$$A=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(y^2+Ax)\,dx\,dy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}y^2\,dx\,dy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^2\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3\,dr=\frac{\pi a^4}{4},$$

故 $f(x,y)=y^2+\frac{\pi a^4}{4}x.$

3.【答案】 $\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$

【解】由对称性得$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{b^2}\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

4.【答案】$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

5.【答案】$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

【解】积分区域$D=\{(x,y)\mid\sqrt{2y}\leqslant x\leqslant\sqrt{8-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\}$，则

原式$=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

6.【答案】$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

【解】令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},x^2\leqslant y\leqslant x\}$，

则$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

7.【答案】$\frac{1}{4}\sin 1$

【解】$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}y\cos(1-x)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\cos(1-x)^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 y\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\cos(1-x)^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^1\cos(1-x)^2\mathrm{d}(1-x)^2$$

$$=-\frac{1}{4}\int_1^0\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^1\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\sin 1.$$

8.【答案】$\frac{1}{4}$

【解】$f(y)f(x+y)=\begin{cases}y(x+y),0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x+y\leqslant 1,\\0,\quad\text{其他},\end{cases}$

则$\iint\limits_D f(y)f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{-y}^{1-y}(x+y)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 y\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{1-y}+y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.$$

9.【答案】(D)

【解】积分区域的直角坐标形式为$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x,y\geqslant 0\}$，则

原式$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$，应选(D).

10.【解】交换积分次序得

$$\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 e^{y^2}dy=\int_0^2 e^{y^2}dy\int_1^{y+1}dx=\int_0^2 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^2=\frac{e^4-1}{2}.$$

11.【解】令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2},0\leqslant r\leqslant-8\cos\theta\right)$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-8\cos\theta}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr.$$

12.【解】改变积分次序得

$$\int_0^t dx\int_0^x\frac{1}{t-y}f(y)dy=\int_0^t dy\int_y^t\frac{f(y)}{t-y}dx=\int_0^t f(y)dy,$$

原式化为 $f(t)=\int_0^t f(y)dy+1$,

两边求导得 $f'(t)-f(t)=0$,解得 $f(t)=Ce^t$,

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$,则 $f(x)=e^x$.

13.【解】交换积分次序得 $\int_2^x dt\int_t^x e^{-u^2}du=\int_2^x e^{-u^2}du\int_2^u dt=\int_2^x(u-2)e^{-u^2}du$,

$$则\lim_{x\to2}\frac{\int_2^x dt\int_t^2 e^{-u^2}du}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{\int_2^x(u-2)e^{-u^2}du}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)e^{-x^2}}{2(x-2)}=\frac{1}{2e^4}.$$

14.【解】令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,F(1)=a$,则

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy$$
$$=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]dx=a\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 F(x)dF(x)=\frac{1}{2}a^2.$$

15.【解】$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}ydy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}y(2\sqrt{1-y^2}-1)dy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}2y\sqrt{1-y^2}dy-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}ydy=\frac{7}{24}-\frac{3}{16}=\frac{5}{48}.$$

16.【解】$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_1^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^x x^2ydy$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 x^2(2x^2-2x)dx=\int_1^2(x^4-x^3)dx=\frac{49}{20}.$$

17.【解】令 $D_1=\{(x,y)\mid-1\leqslant x\leqslant1,-1\leqslant y\leqslant x\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid-1\leqslant x\leqslant1,x\leqslant y\leqslant1\}$,则

$$\iint_D|y-x|dxdy=\iint_{D_1}(x-y)dxdy+\iint_{D_2}(y-x)dxdy,$$

而 $\iint\limits_{D_1}(x-y)dxdy=\int_{-1}^1dx\int_{-1}^x(x-y)dy=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_0^1(x^2+1)dx=\frac{4}{3}$,

$$\iint_{D_2}(y-x)dxdy=\int_{-1}^1dx\int_x^1(y-x)dy=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_0^1(x^2+1)dx=\frac{4}{3},$$

故 $\iint\limits_D|y-x|dxdy=\frac{8}{3}$.

18.【解】令 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$，$D_2=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 2\}$，

则 $\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy$，

而 $\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,dx\,dy=\int_{-1}^1dx\int_0^{x^2}(x^2-y)^{\frac{1}{2}}dy=-\frac{2}{3}\int_{-1}^1(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2}dx$

$$=\frac{2}{3}\int_{-1}^1|x|^3dx=\frac{4}{3}\int_0^1x^3dx=\frac{1}{3};$$

$$\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy=\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^2(y-x^2)^{\frac{1}{2}}dy=\frac{2}{3}\int_{-1}^1(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^2dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-1}^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t}\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4t\,dt=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2t)^2dt=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2t)^2d(2t)$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)^2dt=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos t+\cos^2t)dt$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+2\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3},$$

故 $\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}.$

19.【解】令 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 4<x^2+y^2\leqslant 9\}$，

则 $\iint\limits_D|x^2+y^2-4|\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}(4-x^2-y^2)dx\,dy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-4)dx\,dy$，

而 $\iint\limits_{D_1}(4-x^2-y^2)dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4r-r^3)dr=8\pi$，

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-4)dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3(r^3-4r)dr=\frac{25\pi}{2},$$

故 $\iint\limits_D|x^2+y^2-4|\,dx\,dy=\frac{41\pi}{2}.$

20.【解】令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta)$，则

$$\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dx\,dy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(4r-r^3)dr$$

$$=\int_0^{\pi}(8\sin^2\theta-4\sin^4\theta)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8\sin^2\theta-4\sin^4\theta)d\theta$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=16I_2-8I_4=\frac{5\pi}{2}.$$

21.【解】令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},2a\sin\theta\leqslant r\leqslant 2b\sin\theta\right)$，则

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\sin\theta}^{2b\sin\theta}r^3\sin\theta\cos\theta\,dr$$

$$=4(b^4-a^4)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=4(b^4-a^4)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}(\sin\theta)$$

$$=\frac{2(b^4-a^4)}{3}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{7(b^4-a^4)}{12}.$$

22.【解】令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\cos\theta\right)$,则

$$\iint_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}r^{\frac{3}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}.$$

23.【解】区域 D 写成 $D:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}$,

令$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+r\cos\theta,\\ y=\frac{1}{2}+r\sin\theta\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,则

$$\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r+r^2\cos\theta+r^2\sin\theta)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

24.【解】令$D_1=\{(x,y)\mid x+y\leqslant1,x\geqslant0,y\geqslant0\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid 1<x+y\leqslant2,x\geqslant0,y\geqslant0\}$,

由对称性得$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\left(\iint_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$,

其中$\iint_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1x^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\int_0^1(x^2-x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$,

$$\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}),$$

故原式$=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

25.【解】设$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$

令 $D_1=\left\{(r,\theta)\mid-\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r<+\infty\right\}$,$D_2=\left\{(r,\theta)\mid\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4},0\leqslant r<+\infty\right\}$,

则 $I=\iint_{D_1}y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\sin\theta\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\cos\theta\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r$$

$$=-2\sqrt{2}\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\xlongequal{r^2=t}-2\sqrt{2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$=-\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

26.【解】$\int_0^t yf(t-y)\mathrm{d}y \xlongequal{t-y=u} t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u-\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u$,

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r,$$

则 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^t yf(t-y)\mathrm{d}y}=2\pi\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r}{t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u-\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u}$

$$=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{tf(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t^2}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}$$

$$=2\pi f'(0)\lim_{t\to0^+}\frac{t^2}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}=2\pi f'(0)\lim_{t\to0^+}\frac{2t}{f(t)}$$

$$=4\pi f'(0)\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\frac{f(t)-f(0)}{t}}=4\pi.$$

六、微分方程

1.【答案】$\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$

【解】令 $x+y=u$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(u)\mathrm{e}^{xy}+y\varphi(u)\mathrm{e}^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(u)\mathrm{e}^{xy}+x\varphi(u)\mathrm{e}^{xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\varphi'(u)\mathrm{e}^{xy}+u\varphi(u)\mathrm{e}^{xy},$$

由 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $2\varphi'(u)+u\varphi(u)=0$,或 $\varphi'(u)+\frac{u}{2}\varphi(u)=0$,

解得 $\varphi(u)=C\mathrm{e}^{-\int\frac{u}{2}\mathrm{d}u}=C\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$,

再由 $\varphi(0)=1$ 得 $C=1$,故 $\varphi(u)=\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$.

2.【答案】(B)

【解】$y''-y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$,特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$,

$y''-y=\mathrm{e}^x$ 的特解形式为 $y_1=ax\mathrm{e}^x$,$y''-y=1$ 的特解形式为 $y_2=b$,

故方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的特解形式为 $y=ax\mathrm{e}^x+b$,应选(B).

3.【答案】(D)

【解】因为通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos2x+C_3\sin2x$,

所以特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm2\mathrm{i}$,

特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda-2\mathrm{i})(\lambda+2\mathrm{i})=0$,整理得 $\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$,

对应的微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$,应选(D).

4.【解】 由 $\Delta y=\dfrac{(2y+1)x}{x^2+1}\Delta x+o(\Delta x)$ 得 $y=y(x)$ 可导且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2y+1)x}{x^2+1}$,

即 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2x}{x^2+1}y=\dfrac{x}{x^2+1}$,解得

$$y=\left(\int\frac{x}{x^2+1}\cdot e^{\int-\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right)e^{-\int-\frac{2x}{1+x^2}dx}=C(x^2+1)-\frac{1}{2},$$

由 $y(0)=0$ 得 $C=\dfrac{1}{2}$,故 $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

5.【解】 取 $a=0,b=0$ 得 $f(0)=0$.

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^xf(h)+e^hf(x)-f(x)}{h}$$

$$=e^x\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{e^hf(x)-f(x)}{h}$$

$$=e^xf'(0)+f(x)\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=f(x)+e^x,$$

从而 $f'(x)-f(x)=e^x$,通解为 $f(x)=\left(\int e^x\cdot e^{\int-dx}dx+C\right)e^{-\int-dx}=(x+C)e^x$,

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$,故 $f(x)=xe^x$.

6.【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^xf'(e^x-e^y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-e^yf'(e^x-e^y)$,

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ 得 $f'(e^x-e^y)=\dfrac{1}{e^x-e^y}$,即 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$,$f(u)=\ln u+C$,

由 $f(1)=0$ 得 $C=0$,故 $f(u)=\ln u$.

7.【解】 由 $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$,

令 $u=\dfrac{y}{x}$,原方程化为

$u+x\dfrac{du}{dx}=u+\dfrac{1}{u}$,整理得 $u\,du=\dfrac{dx}{x}$,积分得 $\dfrac{1}{2}u^2=\ln x+C$,

将 $x=e,u=2$ 代入得 $C=1$,所求的特解为 $y^2=2x^2\ln x+2x^2$.

8.【解】 $x\dfrac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$ 化为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$,

令 $u=\dfrac{y}{x}$,原方程化为 $u+x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$,

变量分离得 $\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$,积分得 $\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C$,

解得 $\ln u-1=Cx$,于是 $u=e^{Cx+1}$,故通解为 $y=xe^{Cx+1}$ (C 为任意常数).

9.【解】 通解为 $y=\left[\int\dfrac{1}{x(x^2+1)}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\dfrac{\arctan x+C}{x}$($C$ 为任意常数).

10.【解】 原方程化为 $y'+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)y=\dfrac{e^{2x}}{x}$,

通解为 $y=\left[\int \frac{e^{2x}}{x}\cdot e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx}dx+C\right]e^{-\int(\frac{1}{x}-1)dx}=\frac{Ce^x+e^{2x}}{x}$.

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}y(x)=1$ 得 $C=-1$，故特解为 $y=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$.

11.【解】通解为 $y=\left[\int(\ln x)e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos x dx}dx+C\right]e^{-\int\cos x dx}$

$=\left(\int\ln x dx+C\right)e^{-\sin x}=(x\ln x-x+C)e^{-\sin x}$（$C$ 为任意常数）.

12.【解】原方程化为 $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=\ln x$，

通解为 $y=\left(\int\ln x\cdot e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+C\right)e^{-\int-\frac{2}{x}dx}=\left(\int\frac{\ln x}{x^2}dx+C\right)x^2=Cx^2-x(1+\ln x)$，

由 $y(1)=0$ 得 $C=1$，故 $y=x^2-x(1+\ln x)$.

13.【解】由 $(1-x^2)y''-xy'=0$ 得 $y''+\frac{x}{x^2-1}y'=0$，

解得 $y'=C_1e^{-\int\frac{x}{x^2-1}dx}=\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$，

由 $y'(0)=1$ 得 $C_1=1$，从而 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

于是 $y=\arcsin x+C_2$，再由 $y(0)=0$ 得 $C_2=0$，故 $y=\arcsin x$.

14.【解】当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y'+y=2$ 的通解为 $y=C_1e^{-x}+2$；

当 $x>1$ 时，$y'+y=0$ 的通解为 $y=C_2e^{-x}$，

即 $y=\begin{cases}C_1e^{-x}+2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ C_2e^{-x}, & x>1,\end{cases}$

由 $y(0)=0$ 得 $C_1=-2$，再由 $C_1e^{-1}+2=C_2e^{-1}$ 得 $C_2=2e-2$，

故所求的特解为 $y=\begin{cases}-2e^{-x}+2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ (2e-2)e^{-x}, & x>1.\end{cases}$

15.【解】由 $(3x^2+2)y''=6xy'$ 得 $\frac{(3x^2+2)y''-6xy'}{(3x^2+2)^2}=0$，或 $\left(\frac{y'}{3x^2+2}\right)'=0$，

从而 $y'=C_1(3x^2+2)$，解得 $y=C_1x^3+2C_1x+C_2$，

因为 $C_1x^3+2C_1x+C_2\sim e^x-1\sim x$，所以 $C_1=\frac{1}{2}$，$C_2=0$，

故所求的解为 $y=\frac{1}{2}x^3+x$.

16.【解】由 $yy''+(y')^2=0$ 得 $(yy')'=0$，从而 $yy'=C_1$，

进一步得 $\left(\frac{1}{2}y^2\right)'=C_1$，于是 $\frac{1}{2}y^2=C_1x+C_2$，

由 $y(0)=1$，$y'(0)=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$，$C_2=\frac{1}{2}$，故 $y=\sqrt{x+1}$.

17.【解】特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，

则 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

令特解为 $y_0=axe^x$，代入原方程得 $a=-2$，

则原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$.

曲线 $y=x^2-x+1$ 在(0,1)处的斜率为 $y'|_{x=0}=-1$，

由题意得 $y(0)=1,y'(0)=-1$，从而 $\begin{cases}C_1+C_2=1,\\C_1+2C_2-2=-1.\end{cases}$ 解得 $C_1=1,C_2=0$，

故所求的特解为 $y=e^x-2xe^x$.

18.【解】特征方程为 $\lambda^2-1=0$，特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，

则 $y''-y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$，

令 $y''-y=4\cos x$ 的特解为 $y_1=a\cos x+b\sin x$，代入得 $a=-2,b=0$；

令 $y''-y=e^x$ 的特解为 $y_3=cxe^x$，代入得 $c=\frac{1}{2}$，

所以特解为 $y_0=-2\cos x+\frac{1}{2}xe^x$，

则原方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x-2\cos x+\frac{1}{2}xe^x$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

19.【解】$\int_0^1[f(x)+xf(xt)]dt=f(x)+\int_0^1 f(xt)d(xt)=f(x)+\int_0^x f(u)du$，

因为 $\int_0^1[f(x)+xf(xt)]dt$ 与 x 无关，所以 $\frac{d}{dx}\left[f(x)+\int_0^x f(u)du\right]=0$，

即 $f'(x)+f(x)=0$，解得 $f(x)=Ce^{-x}$（C 为任意常数）.

20.【解】$\int_0^x tf(x-t)dt \xlongequal{x-t=u} x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$，

$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=x$ 化为 $\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=x$，

两边求导得 $f(x)+\int_0^x f(t)dt=1$，

两边再求导得 $f'(x)+f(x)=0$，解得 $f(x)=Ce^{-x}$，

因为 $f(0)=1$，所以 $C=1$，故 $f(x)=e^{-x}$.

21.【解】令 $\sqrt{x^2+y^2}=r,u=f(\ln r)$，

$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(\ln r)\cdot\frac{x}{r^2}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(\ln r)\cdot\frac{x^2}{r^4}+f'(\ln r)\cdot\frac{r^2-2xr\cdot\frac{x}{r}}{r^4}=f''(\ln r)\cdot\frac{x^2}{r^4}+f'(\ln r)\cdot\frac{y^2-x^2}{r^4}$，

由对称性得

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(\ln r)\cdot\frac{y^2}{r^4}+f'(\ln r)\cdot\frac{x^2-y^2}{r^4}$，

则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}f''(\ln r)$，则原方程化为 $f''(\ln r)=r^5$，从而 $f''(t)=e^{5t}$，

得 $f'(t)=\frac{1}{5}e^{5t}+C_1$，故 $f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}+C_1t+C_2$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

线性代数部分

一、填空题

1.【答案】 $(n-1)(-1)^{n-1}$

【解】$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}$

$$=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(n-1)(-1)^{n-1}.$$

2.【答案】 0

【解】$\begin{vmatrix}0&-a&b\\a&0&-c\\-b&c&0\end{vmatrix}=(-a)A_{12}+bA_{13}=aM_{12}+bM_{13}$

$$=a\begin{vmatrix}a&-c\\-b&0\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a&0\\-b&c\end{vmatrix}=-abc+abc=0.$$

3.【答案】 $\dfrac{(-1)^{n-1}5^n}{6}$

【解】$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=-3\boldsymbol{B}^{-1}$，则

$$|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=|-3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}-2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|=(-5)^n|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}|=\frac{(-1)^{n-1}5^n}{6}.$$

4.【答案】 12

【解】由$(-\boldsymbol{A}_1-2\boldsymbol{A}_2,2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_3,-3\boldsymbol{A}_3+2\boldsymbol{A}_1)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)\begin{pmatrix}-1&0&2\\-2&2&0\\0&3&-3\end{pmatrix}$，得

$|-\boldsymbol{A}_1-2\boldsymbol{A}_2,2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_3,-3\boldsymbol{A}_3+2\boldsymbol{A}_1|$

$$=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|\cdot\begin{vmatrix}-1&0&2\\-2&2&0\\0&3&-3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1&0&2\\-2&2&0\\0&3&-3\end{vmatrix}=12.$$

5.【答案】 126

【解】由 $|A-E|=|A+2E|=|2A+3E|=0$ 得

$|E-A|=0,\ |-2E-A|=0,\ |-\frac{3}{2}E-A|=0,$

则矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-\frac{3}{2}$,

得 $|A|=3$, A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1}=3,\frac{|A|}{\lambda_2}=-\frac{3}{2},\frac{|A|}{\lambda_3}=-2$,

$2A^*-3E$ 的特征值为 $3,-6,-7$,故 $|2A^*-3E|=126$.

6.【答案】$\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

【解】由 $B=A\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=AE_3(3)E_{13}$ 得

$B^{-1}A=E_{13}^{-1}E_3^{-1}(3)A^{-1}A=E_{13}E_3(\frac{1}{3})$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

7.【答案】2

【解】因为 $|B|=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=12\neq 0$,所以 B 可逆,

于是 $r(AB)=r(A)=2$.

8.【答案】6

【解】由 $\begin{vmatrix}0&2&1-k\\4&3-k&2\\2-k&1&3\end{vmatrix}=0$,得 $k=6$.

9.【答案】-1

【解】因为 $A\alpha$ 与 α 线性相关,所以 $A\alpha$ 与 α 成比例,

令 $A\alpha=k\alpha$,即 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$,从而 $\begin{cases}a=ka,\\2a+3=k,\\3a+4=k,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

10.【答案】$abc\neq 0$

【解】由 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$ 得 a,b,c 满足的关系式为 $abc \neq 0$.

11.【答案】$a_4 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$

【解】$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_4 - a_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_4 - a_1 + a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - a_1 + a_2 - a_3 \end{pmatrix},$$

则方程组有解应满足的条件为 $a_4 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$.

12.【答案】1

【解】由 $AB = O$ 得 $r(A) + r(B) \leqslant 3$,

因为 $r(B) \geqslant 1$,所以 $r(A) \leqslant 2$,

又因为矩阵 A 有两行不成比例,所以 $r(A) \geqslant 2$,于是 $r(A) = 2$.

由 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & t \\ 1 & 9 & t+7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & t-6 \\ 0 & 6 & t+4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$ 得 $t = 1$.

13.【答案】-1

【解】$|A| = 6\lambda$,由 $|2A| = 8|A| = -48$ 得 $|A| = -6$,解得 $\lambda = -1$.

14.【答案】4

【解】由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4) = 0$ 得

A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$,非零特征值为 4.

15.【答案】-10

【解】由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -a \\ -1 & \lambda - 3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ 得

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$,

因为 A 可对角化,所以 $r(2E - A) = 1$,

由 $2E - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -a \\ -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -a-10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $a = -10$.

16.【答案】$x = -17, y = -12$

【解】设 $A=\begin{pmatrix}22 & 31\\ y & x\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

由 A 与 B 相似得 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$，即 $x+22=5$，解得 $x=-17$；

由 $|A|=|B|$ 得 $-374-31y=-2$，解得 $y=-12$.

17.【答案】$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,a=-5$

【解】$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -a\\ -1 & \lambda-3 & -5\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3=0$，

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，

因为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 只有两个线性无关的特征向量，

所以 $r(2E-A)=1$，

由 $2E-A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ -1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $a=-5$.

二、选择题

1.【答案】(A)

【解】不妨设第一列元素及余子式都是 a，则

$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{2n,1}A_{2n,1}=a^2-a^2+\cdots-a^2=0$，应选(A).

2.【答案】(D)

【解】$|A|\neq 0$ 的充要条件是 $r(A)=n$，$r(A)=n$ 的充要条件是 $AX=b$ 有唯一解，应选(D).

3.【答案】(A)

【解】因为矩阵的秩与行向量组的秩及列向量组的秩相等，所以由 $r(A)=r$ 得 A 一定有 r 个行向量线性无关，应选(A).

4.【答案】(C)

【解】因为初等变换不改变矩阵的秩，所以若 $|A|=0$，即 $r(A)<n$，则 $r(B)<n$，即 $|B|=0$，应选(C).

5.【答案】(A)

【解】因为(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，所以(Ⅰ)的秩 $\leqslant$(Ⅱ)的秩，

所以若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，即(Ⅰ)的秩 $=r$，则 $r\leqslant$(Ⅱ)的秩 $\leqslant s$，应选(A).

6.【答案】(B)

【解】由 $AB=E$ 得 $r(AB)=n$，从而 $r(A)\geqslant n,r(B)\geqslant n$，

又 $r(A)\leqslant n,r(B)\leqslant n$，所以 $r(A)=n,r(B)=n$，

故 B 的列向量组线性无关，应选(B).

7.【答案】(A)

【解】$r(\overline{A})\geqslant r(A)$，

当 $r=m$ 时，$r(\overline{A})\geqslant r(A)=m$；

又 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant m$，所以 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = m$，故 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有解，应选(A).

8.【答案】(B)

【解】由 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{CA}$ 得 $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) \leqslant n$，

由 $r(\boldsymbol{A}) = n$ 得 $r(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) = 0$，故 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$，应选(B).

9.【答案】(A)

【解】(B) 显然不对，因为与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 等秩的向量组不一定是方程组的解；

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) - (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，不选(C)；

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + (\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3) + (\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，不选(D)，应选(A).

10.【答案】(C)

【解】若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量都不可由其余向量线性表示；反之，若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量都不可由其余向量线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，应选(C).

11.【答案】(D)

【解】显然 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) \geqslant r(\boldsymbol{A}) = m$，

因为 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为 $m \times (n+1)$ 矩阵，所以 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant m$，

于是 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = m < n$，故 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 一定有无数个解，应选(D).

12.【答案】(C)

【解】因为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的任一非零解都可由 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个线性无关的解向量，从而 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

由 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & a+2 & 4 \\ 5 & a & a+5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & a & a+5 \\ 3 & a+2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & a+5 & a-5 \\ 0 & a+5 & -2 \end{pmatrix}$ 得

$a - 5 = -2$ 或 $a + 5 = 0$，解得 $a = 3$ 或 -5，应选(C).

13.【答案】(C)

【解】因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系至少含两个线性无关的解向量，从而 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 1$，

再由题意得 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$，显然选(C).

14.【答案】(A)

【解】由 $\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ -18 & 10 & -8 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ -6 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 得

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，应选(A).

15.【答案】(C)

【解】$\begin{pmatrix}7&8&0\\0&0&9\\0&0&0\end{pmatrix}$的特征值为 7,0,0,因为 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $\lambda=0$ 对应的线性无关的特征向量只有一个,该矩阵不可相似对角化,应选(C).

16.【答案】(B)

【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,从而 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,应选(B).

17.【答案】(A)

【解】因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵,且特征值相同,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 既相似又合同,应选(A).

三、解答题

1.【解】(1)$2A_{11}+A_{12}-A_{13}=2A_{11}+A_{12}-A_{13}+0A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}2&1&-1&0\\-1&2&0&4\\2&1&-1&0\\1&2&1&2\end{vmatrix}=0;$$

$$(2)A_{11}+4A_{21}+A_{31}+2A_{41}=\begin{vmatrix}1&3&2&1\\4&2&0&4\\1&1&-1&0\\2&2&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&-10&-8&0\\0&-2&-3&-1\\0&-4&-3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-10&-8&0\\-2&-3&-1\\-4&-3&0\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}5&-8&0\\1&-3&-1\\2&-3&0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-3&-1\\5&-8&0\\2&-3&0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-3&-1\\0&7&5\\0&3&2\end{vmatrix}=-2.$$

2.【解】由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$|4\boldsymbol{A}-(3\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=|4\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}|=|3\boldsymbol{A}|=27|\boldsymbol{A}|=9.$

3.【解】令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,由 $\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{A\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{A\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 得

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,两边取行列式得 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\cdot\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2|\boldsymbol{B}|$,

因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆,故 $|\boldsymbol{A}|=2$.

4.【解】由初等变换的性质得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2$,则 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}$.

5.【解】由 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$ 得$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$,

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$,因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\neq0$,所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆,

从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

6.【解】由 $AP=PB$ 得 $A=PBP^{-1}$，

由 $\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&-1&0\\0&0&1&-4&1&1\end{pmatrix}$ 得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$，

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

7.【解】由 $A^{-1}(E-BB^{T}A^{-1})^{-1}C^{-1}=E$ 得 $C(E-BB^{T}A^{-1})A=E$，即 $C(A-BB^{T})=E$，解得 $C=(A-BB^{T})^{-1}$.

由 $BB^{T}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}(0,1,-1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$A-BB^{T}=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&0&1/4\\0&1/3&0\end{pmatrix}$；

由 $\begin{pmatrix}1/2&0&0&1&0&0\\0&0&1/4&0&1&0\\0&1/3&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&0&1&0&4&0\\0&1&0&0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&1&0&0&0&3\\0&0&1&0&4&0\end{pmatrix}$ 得

$$C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&3\\0&4&0\end{pmatrix}.$$

8.【解】令 $X=(X_1,X_2)$，

由 $\begin{pmatrix}1&2&-3&3&-1\\1&1&-1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&3&-1\\0&-1&2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&-2&1&-1\end{pmatrix}$ 得

$X_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+1\\2k_1+1\\k_1\end{pmatrix}$，$X_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2+1\\2k_2-1\\k_2\end{pmatrix}$，

故 $X=\begin{pmatrix}-k_1+1&-k_2+1\\2k_1+1&2k_2-1\\k_1&k_2\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

9.【证明】由向量组（Ⅱ）的秩为3，得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关，从而 α_1,α_2 线性无关，

由向量组（Ⅰ）的秩为2，得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，

从而 α_3 可由 α_1,α_2 线性表示，令 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&k_1\\0&1&k_2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

由 $\begin{vmatrix}1&0&k_1\\0&1&k_2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$ 得矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&k_1\\0&1&k_2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，

故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$.

10.【解】

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-k_1&15&3\\1&-5&-10&12&k_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&-k_1-6&6&0\\0&-6&-12&9&k_2-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&-k_1+2&2&4\\0&0&0&3&k_2+5\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $k_1\neq 2$ 时,方程组有唯一解;

(2) 当 $k_1=2$ 时,

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&3&k_2+5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&k_2-1\end{pmatrix}.$$

情形一:$k_2\neq 1$ 时,方程组无解;

情形二:$k_2=1$ 时,方程组有无数个解,

$$\text{由 }\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得此时原方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\3\\0\\2\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

11.【解】 $\begin{vmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{vmatrix}=-(a+4)$.

(1) 当 $a\neq -4$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示.

当 $a=-4$ 时,

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-4&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&1&b\\-4&-2&-1&1\\10&5&4&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&1&b\\0&0&1&2b+1\\0&0&-1&c-5b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&1&b\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&c-3b+1\end{pmatrix}.$$

(2) 当 $c-3b+1=0$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表示方法不唯一,

由 $\overline{A} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{b+1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

得 $X = k\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{b+1}{2} \\ 0 \\ 2b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{2}-\frac{b+1}{2} \\ k \\ 2b+1 \end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{k}{2}-\frac{b+1}{2}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_2 + (2b+1)\boldsymbol{\alpha}_3$（其中 k 为任意常数）.

(3) 当 $c-3b+1 \neq 0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

12.【解】 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 1 & n & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 由 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

方程组(Ⅰ)的通解为 $X = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & m \\ 1 & n & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & m+1 \\ 0 & n-2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

当 $m=-2$ 或 $n=3$ 时，两个方程组有公共的非零解.

(3) 当 $m=-2, n=3$ 时，两个方程组同解.

13.【解】 (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$，

方程组(Ⅰ)的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2)(Ⅱ)的通解为 $X = l_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a+2 \\ 1 \end{pmatrix} + l_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ a+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l_1 - l_2 \\ -l_1 + 2l_2 \\ (a+2)l_1 + 4l_2 \\ l_1 + (a+8)l_2 \end{pmatrix}$，

代入(Ⅰ)得 $\begin{cases} 2(2l_1 - l_2) + 3(-l_1 + 2l_2) - (a+2)l_1 - 4l_2 = 0, \\ 2l_1 - l_2 + 2(-l_1 + 2l_2) + (a+2)l_1 + 4l_2 - l_1 - (a+8)l_2 = 0, \end{cases}$

整理得$\begin{cases}-(a+1)l_1=0,\\(a+1)l_1-(a+1)l_2=0,\end{cases}$

因为两个方程组有公共的非零解,所以 l_1,l_2 不全为零,

从而$\begin{vmatrix}-(a+1) & 0\\ a+1 & -(a+1)\end{vmatrix}=0$,解得 $a=-1$.

14.【解】因为 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,所以 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{vmatrix}=0$,解得 $a=1$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$,得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$.

$\lambda_1=0$ 代入$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得

$\lambda_1=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 代入$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

15.【解】因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,

$\boldsymbol{B}^*$ 的特征值为$\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{\lambda_1}=6,\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{\lambda_2}=3,\dfrac{|\boldsymbol{B}|}{\lambda_3}=2$,

$\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 7,4,3,故$|\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{E}|=84$.

16.【解】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$,

由 $|\boldsymbol{A}|=2(9-a^2)=10$ 得 $a=2,\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$.

$\lambda_1=1$ 代入$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得

$\lambda_1=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；

$\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_2=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；

$\lambda_3=5$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_3=5$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

17.【解】 $|\boldsymbol{A}^*|=4\times(-14)\times(-14)=28^2$，由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2$ 得 $|\boldsymbol{A}|=28$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-28$.

$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-2&2\\-2&a&4\\2&4&-2\end{vmatrix}=-6a-40.$

若 $-6a-40=28$，则 $a=-\frac{34}{3}$，不合题意，舍去；

若 $-6a-40=-28$，则 $a=-2$，从而 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{4}=-7$，$\lambda_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{-14}=\lambda_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{-14}=2$.

$\lambda_1=-7$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $-7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&9&9\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 得

$\lambda_1=-7$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$;

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$,

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$,

所求的正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-7&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

18.【证明】 由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 得 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,则

$r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n$;

由 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r(4\boldsymbol{E})=n$ 得 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$.

(1) 当 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n$ 时,$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$ 为对角阵;

(2) 当 $r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$ 时,$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$ 为对角矩阵;

(3) $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})<n,r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})<n$ 时,$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$, $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$.

$\lambda_1=-1$ 对应的线性无关的特征向量个数为 $n-r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$;

$\lambda_2=3$ 对应的线性无关的特征向量个数为 $n-r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$.

因为 $n-r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+n-r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

19.【解】 由 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 及 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=10$ 得 $\lambda_3=6$.

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量,所以 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-a&-2&-b\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&a-2&-a-b\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $a=2,b=-2$.

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的线性无关的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

$\lambda_3=6$ 代入$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\5&1&-1\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=6$ 对应的线性无关

的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

20.【解】(1) 由$\begin{cases}2>0,\\3>0,\\3t>0.\end{cases}$ 得 $t>0$，当 $t>0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都大于零，所以 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

(2) 由 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $r(\boldsymbol{B})=2$，

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2<3$，故 $t=0$.

(3)$\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=5$，

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-t\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-t)=0$ 得

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=t$，故 $t=5$.

(4) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=0$ 得

$\lambda_1=2>0,\quad \lambda_2=1+\sqrt{2}>0,\quad \lambda_3=1-\sqrt{2}<0$，

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=t$，

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 合同，所以特征值中正、负个数一致，故 $t<0$.

21.【解】$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$，

因为 A 正定,所以 $\begin{cases}1>0,\\4-\lambda^2>0,\\8-4\lambda-4\lambda^2>0,\end{cases}$ 解得 $-2<\lambda<1$.

22.【解】(1) 令 $AX=\lambda X$,

由 $A^2+2A=O$ 得 $(\lambda^2+2\lambda)X=0$,注意到 $X\neq 0$,则 $\lambda^2+2\lambda=0$,

解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-2$.

由 $r(A)=2$ 得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-2$.

(2)$A+kE$ 的特征值为 $k,k-2,k-2$,当 $k>2$ 时,$A+kE$ 为正定矩阵.

23.【解】$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,

二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2=0$ 得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=3$,

则二次型的秩为 2,正惯性指数为 2,负惯性指数为 0.

文都考研APP

考研复习备考助手

文都考研APP是世纪文都教育科技集团精心打造的在线考研学习软件，是集院校考研资讯、考研经验、考研资料、考研真题、考研名师试听课程于一体的考研人的移动精神家园。在这里，您能及时查看报考院校的官方信息、考研成绩和分数线、学长经验，获取名师免费试听课程，了解学科难点。

主要特色

文都考研下载二维码

1.量身定制

海量考研干货随手掌握

2.精品微课

考研名师精品课来引路

3.考研资讯

你关心的才是考研头条

4.贴心助手

考研百科为你解决困惑

5.真题测评

智能评估突破学习瓶颈

文都考研APP是您得力的考研复习助手

文都教育®

考研数学精品图书系列

搜索一下

1.2020《考研数学复习大全》（数学一至三）

2.2020《全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义》

3.2020《全国硕士研究生招生考试线性代数辅导讲义》

4.2020《全国硕士研究生招生考试概率论与数理统计辅导讲义》

5.2020《考研数学接力题典1800》（数学一至三）

6.2020《考研数学15年真题解析与方法指导》（数学一至三）

7.2020《考研数学绝对考场最后八套题》（数学一至三）

8.《考研数学必备手册》

文都图书　名师精品

新浪微博：@文都编辑部
3024394833 数学小助手QQ

上架指导：考研类图书

ISBN 978-7-5022-7110-7

定价：72.00元

防伪验证　　文都编辑部微信公众号